MATEMÁTICAS 3

COLEGIO DE BACHILLERES
DEL ESTADO DE SONORA

Director General
Mtro. Jorge Luis Ibarra Mendívil

Director Académico
Profr. Julio Alfonso Martínez Romero

Director de Administración y Finanzas
C.P. Jesús Urbano Limón Tapia

Director de Planeación
Mtro. Pedro Hernández Peña

MATEMÁTICAS 3
Módulo de Aprendizaje.

Primera edición 2010. Impreso en México.

DIRECCIÓN ACADÉMICA
Departamento de Desarrollo Curricular
Blvd. Agustín de Vildósola, Sector Sur
Hermosillo, Sonora. México. C.P. 83280

Registro ISBN, en trámite.

COMISIÓN ELABORADORA:

EQUIPO TÉCNICO

Coordinación general:	
Luz María Grijalva Díaz	
Elaboradores disciplinares:	
Alma Lorenia Valenzuela Chávez	Matemáticas 3
Nydia Gabriela Estrella	Biología 1
María del Socorro Salas Meneses	Historia de México 2
Diego Navarro Gil	Literatura 1
Alfonso Bernardo Harita	Física 1
Moisés Galaz Duarte	Lengua Adicional al Español 3
Silvia Hilda Pacheco Ibarra	Orientación Educativa 3

Revisión Disciplinaria:
Margarita León Vega

Corrección de Estilo:
Flora Inés Cabrera Fregoso

Supervisión Académica:
Diana Irene Valenzuela López

Diseño:
Joaquín Rivas Samaniego
María Jesús Jiménez Duarte

Grupo Editorial:
Ana Isabel Ramírez Vásquez
Bernardino Huerta Valdez
Cynthia Deyanira Meneses Avalos
Francisco Peralta Varela

Coordinación Técnica:
Claudia Yolanda Lugo Peñúñuri

Coordinación General:
Profr. Julio Alfonso Martínez Romero

Esta publicación se terminó de imprimir durante el mes de junio de 2010.
Diseñada en Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora
Blvd. Agustín de Vildósola; Sector Sur. Hermosillo, Sonora, México
La edición consta de 10,332 ejemplares.

DATOS DEL ALUMNO

Nombre: ____

Plantel: ____

Grupo: ______________ Turno: ___________ Teléfono: _______________

E-mail: ____

Domicilio: ____

____

Ubicación Curricular

COMPONENTE: **FORMACIÓN BÁSICA**	**HORAS SEMANALES:** **05**
CAMPO DE CONOCIMIENTO: **MATEMÁTICAS**	**CRÉDITOS:** **10**

Índice

Presentación 7
Mapa de asignatura 8

BLOQUE 1: RECONOCE LUGARES GEOMÉTRICOS 9
Secuencia Didáctica 1: Sistema de ejes coordenadas rectangulares 10
- Coordenadas cartesianas de un punto 11
- Plano cartesiano 13

Secuencia Didáctica 2: Lugar geométrico 21
- Concepto de lugar geométrico 22

BLOQUE 2: APLICA LAS PROPIEDADES DE SEGMENTOS RECTILÍNEOS Y POLÍGONOS 37
Secuencia Didáctica 1: Segmentos rectilíneos 38
- Definición de segmento rectilíneo 39
- Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano 45

Secuencia Didáctica 2: División de un segmento rectilíneo 59
- Noción de razón en la división de un segmento rectilíneo 60
- División de un segmento del plano cartesiano, en una razón dada 65
- Áreas y perímetros de polígonos 74

BLOQUE 3: INTEGRA LOS ELEMENTOS DE UNA RECTA COMO LUGAR GEOMÉTRICO 84
Secuencia Didáctica 1: Inclinación de la recta 90
- Ángulo de inclinación y pendiente de la recta 91
- Paralelismo y perpendicularidad entre dos rectas 102

Secuencia Didáctica 2: La recta como lugar geométrico 109
- Definición de la recta 112
- Condiciones para la gráfica de la línea recta 113

BLOQUE 4: UTILIZA DISTINTAS FORMAS DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA 131
Secuencia Didáctica 1: Formas de la ecuación de la recta 132
- Forma punto-pendiente 134
- Forma simétrica 144
- Forma normal de la ecuación de la recta 150
- Conversión de la ecuación general de la recta a sus distintas formas 159

Secuencia Didáctica 2: Calcula distancias 166
- Distancia de un punto a una recta 168
- Distancia entre dos rectas paralelas 175

BLOQUE 5: EMPLEA LA CIRCUNFERENCIA 179
Secuencia Didáctica 1: Caracterización geométrica 180
- La circunferencia como lugar geométrico 182
- Formas de trazo a partir de la definición 190

Secuencia Didáctica 2: Ecuación de la circunferencia 200
- Circunferencia con centro en el origen 201
- Circunferencia con centro fuera del origen 210
- Ecuación general de la circunferencia 220

Índice *(continuación)*

BLOQUE 6: APLICA LA ELIPSE 239
Secuencia Didáctica 1: Caracterización geométrica 240
- La elipse como lugar geométrico 242
- Gráfica de la elipse 247

Secuencia Didáctica 2: Ecuación de la elipse 256
- Elipse con centro en el origen 258
- Elipse con centro fuera del origen 268
- Ecuación general de la elipse 276

BLOQUE 7: UTILIZA LA PARÁBOLA 289
Secuencia Didáctica 1: Caracterización geométrica 290
- La parábola como lugar geométrico 291
- Gráfica de la parábola 295

Secuencia Didáctica 2: Ecuación de la parábola 304
- Parábola con vértice en el origen 306
- Parábola con vértice fuera del origen 315
- Ecuación general de la parábola 322

Bibliografía 336

Presentación

“Una competencia es la integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico”.

El enfoque en competencias considera que los conocimientos por sí mismos no son lo más importante, sino el uso que se hace de ellos en situaciones específicas de la vida personal, social y profesional. De este modo, las competencias requieren una base sólida de conocimientos y ciertas habilidades, los cuales se integran para un mismo propósito en un determinado contexto.

El presente Módulo de Aprendizaje de la asignatura Matemáticas 3, es una herramienta de suma importancia, que propiciará tu desarrollo como persona visionaria, competente e innovadora, características que se establecen en los objetivos de la Reforma Integral de Educación Media Superior que actualmente se está implementando a nivel nacional.

El Módulo de aprendizaje es uno de los apoyos didácticos que el Colegio de Bachilleres te ofrece con la intención de estar acorde a los nuevos tiempos, a las nuevas políticas educativas, además de lo que demandan los escenarios local, nacional e internacional; el módulo se encuentra organizado a través de bloques de aprendizaje y secuencias didácticas. Una secuencia didáctica es un conjunto de actividades, organizadas en tres momentos: Inicio, desarrollo y cierre. En el inicio desarrollarás actividades que te permitirán identificar y recuperar las experiencias, los saberes, las preconcepciones y los conocimientos que ya has adquirido a través de tu formación, mismos que te ayudarán a abordar con facilidad el tema que se presenta en el desarrollo, donde realizarás actividades que introducen nuevos conocimientos dándote la oportunidad de contextualizarlos en situaciones de la vida cotidiana, con la finalidad de que tu aprendizaje sea significativo.

Posteriormente se encuentra el momento de cierre de la secuencia didáctica, donde integrarás todos los saberes que realizaste en las actividades de inicio y desarrollo.

En todas las actividades de los tres momentos se consideran los saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales. De acuerdo a las características y del propósito de las actividades, éstas se desarrollan de forma individual, binas o equipos.

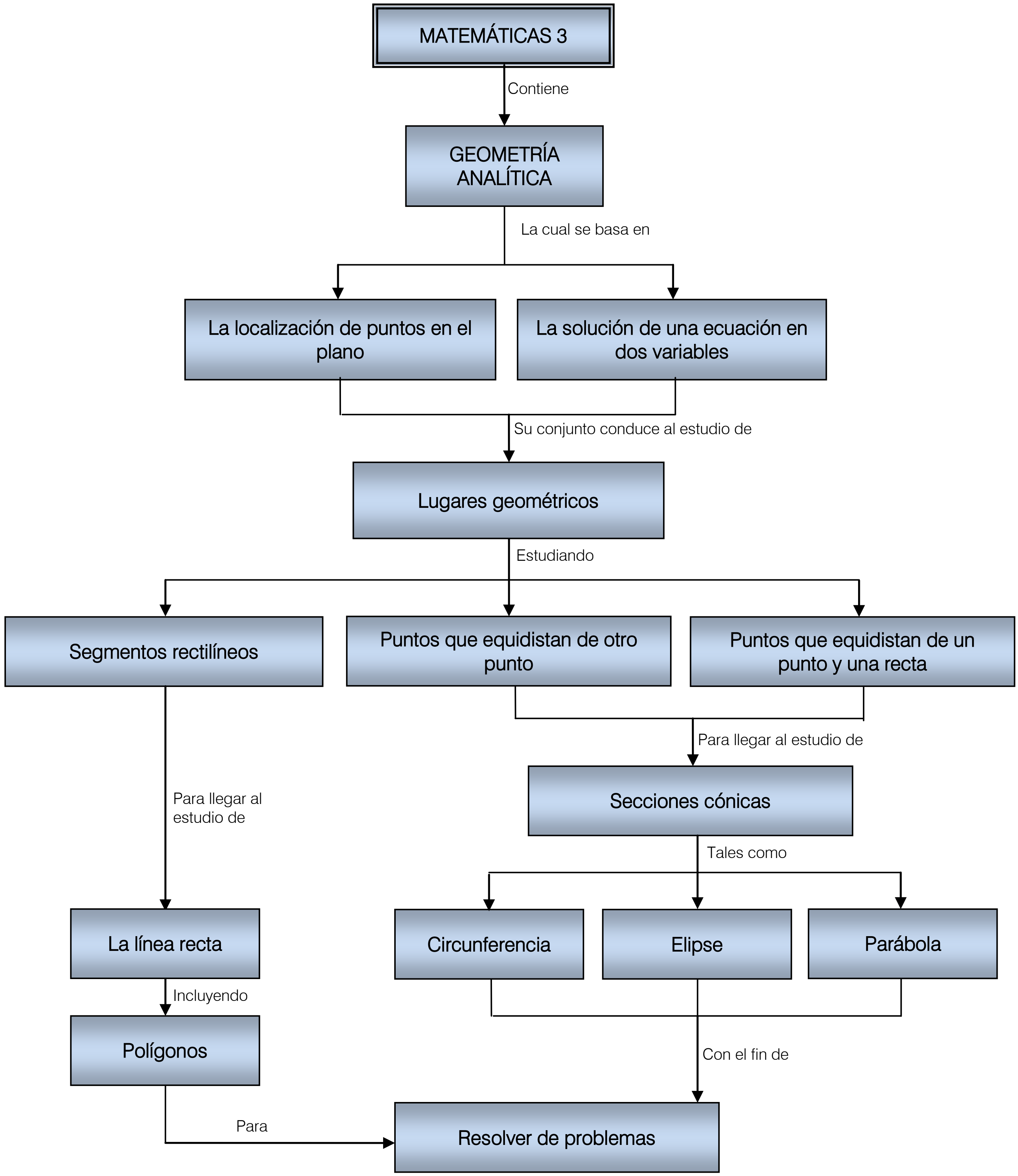
Para el desarrollo del trabajo deberás utilizar diversos recursos, desde material bibliográfico, videos, investigación de campo, etc.

La retroalimentación de tus conocimientos es de suma importancia, de ahí que se te invita a participar de forma activa cuando el docente lo indique, de esta forma aclararás dudas o bien fortalecerás lo aprendido; además en este momento, el docente podrá tener una visión general del logro de los aprendizajes del grupo.

Recuerda que la evaluación en el enfoque en competencias es un proceso continuo, que permite recabar evidencias a través de tu trabajo, donde se tomarán en cuenta los tres saberes: el conceptual, procedimental y actitudinal con el propósito de que apoyado por tu maestro mejores el aprendizaje. Es necesario que realices la autoevaluación, este ejercicio permite que valores tu actuación y reconozcas tus posibilidades, limitaciones y cambios necesarios para mejorar tu aprendizaje.

Así también, es recomendable la coevaluación, proceso donde de manera conjunta valoran su actuación, con la finalidad de fomentar la participación, reflexión y crítica ante situaciones de sus aprendizajes, promoviendo las actitudes de responsabilidad e integración del grupo.

Nuestra sociedad necesita individuos a nivel medio superior con conocimientos, habilidades, actitudes y valores, que les permitan integrarse y desarrollarse de manera satisfactoria en el mundo laboral o en su preparación profesional. Para que contribuyas en ello, es indispensable que asumas una nueva visión y actitud en cuanto a tu rol, es decir, de ser receptor de contenidos, ahora construirás tu propio conocimiento a través de la problematización y contextualización de los mismos, situación que te permitirá: Aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a ser y aprender a vivir juntos.


MATEMÁTICAS 3
Contiene
GEOMETRÍA ANALÍTICA
La cual se basa en
La localización de puntos en el plano
La solución de una ecuación en dos variables
Su conjunto conduce al estudio de
Lugares geométricos
Estudiando
Segmentos rectilíneos
Puntos que equidistan de otro punto
Puntos que equidistan de un punto y una recta
Para llegar al estudio de
Secciones cónicas
Para llegar al estudio de
Tales como
La línea recta
Circunferencia
Elipse
Parábola
Incluyendo
Polígonos
Con el fin de
Para
Resolver de problemas

BLOQUE 1

Reconoce lugares geométricos.

Competencias disciplinares básicas:

- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Unidad de competencia:

- Analizar las relaciones entre las variables que conforman las parejas ordenadas que determinan un lugar geométrico.
- Interpreta la información contenida en tablas, gráficas, mapas, diagramas, etc., a partir de la noción de parejas ordenadas.
- Argumenta la relación inferida entre los elementos de conjuntos de parejas ordenadas para establecer que define un lugar geométrico.

Atributos a desarrollar en el bloque:

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
8.1 Propone maneras de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
8.3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

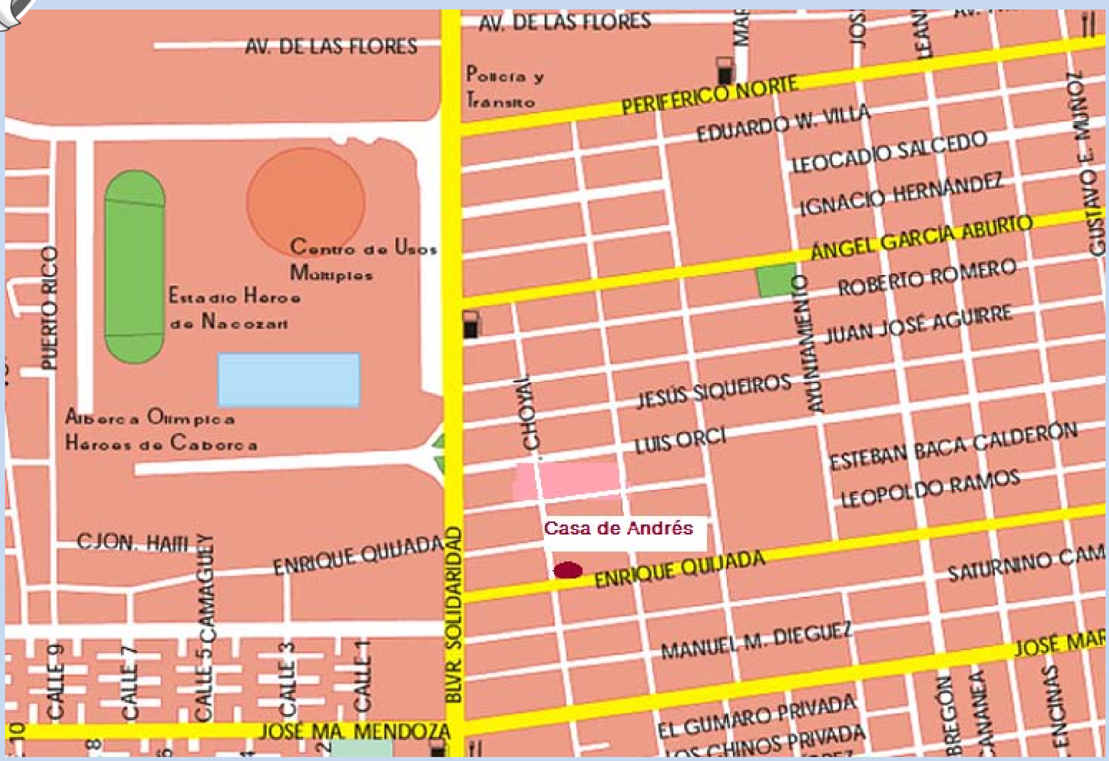
Tiempo asignado: 9 horas

Secuencia didáctica 1.
Sistema de ejes coordenadas rectangulares.

Inicio

Actividad: 1

Observa el mapa y contesta lo que se te pide.



Si estás situado en la casa de Andrés, cuya dirección es Choyal y Enrique Quijada, escribe cuántas cuadras (del camino más corto) y cuál es el sentido que tienes que recorrer para llegar a los siguientes lugares:

a) Ayuntamiento.

b) Policía y Tránsito.

c) Alberca Olímpica Héroes de Caborca.

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 1</td><td colspan="3">Producto: Mapa.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Describe en el mapa la ubicación de algunos lugares.</td><td colspan="3">Ubica la distancia y el sentido de lugares específicos.</td><td colspan="2">Muestra interés al realizar la actividad.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Desarrollo

Coordenadas cartesianas de un punto.

Actividad: 2

Michelle compró 3 blusas: una azul, una blanca y una amarilla, y 4 pantalones: uno de mezclilla azul, uno de mezclilla negro, uno de vestir negro y un Capri. En equipo, realicen una lista de posibles combinaciones de ropa que Michelle puede usar.

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 2</td><td colspan="3">Producto: Listado.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Combina elementos para formar parejas ordenadas.</td><td colspan="3">Organiza elementos para formar parejas ordenadas.</td><td colspan="2">Aprecia la importancia de realizar combinaciones para obtener diferentes parejas ordenadas de elementos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

En la lista anterior observaron que se puede asignar una blusa con un pantalón de colores determinados, de la misma forma, se pueden organizar de forma simplificada asignándoles números, letras o cualquier elemento que identifique a cada blusa y pantalón, como se muestra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.
Se desea formar números de dos dígitos utilizando los dígitos 3, 7, 9.
Los posibles números son:

33, 37, 39, 73, 77, 79, 93, 97, 99

En la lista anterior existen números que fueron formados con las mismas cifras, como es el caso de los números 39 y 93, éstos son números distintos debido a que son creados respetando un orden específico, la pareja de cifras para formar el número 39 se establece con (3, 9), y (9, 3) corresponde al número 93.

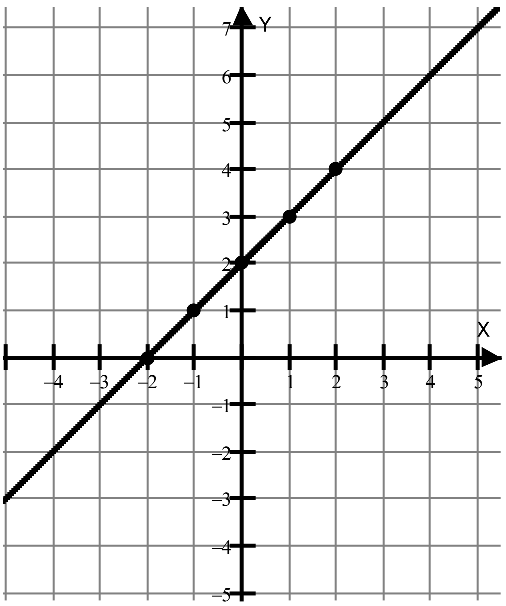
Ejemplo 2.
Un profesor quiere formar equipos de dos personas con cuatro de sus alumnos: Juan, Pablo, Luis y César.
Si se le asigna la letra inicial a cada uno de los nombres, las posibles parejas son:

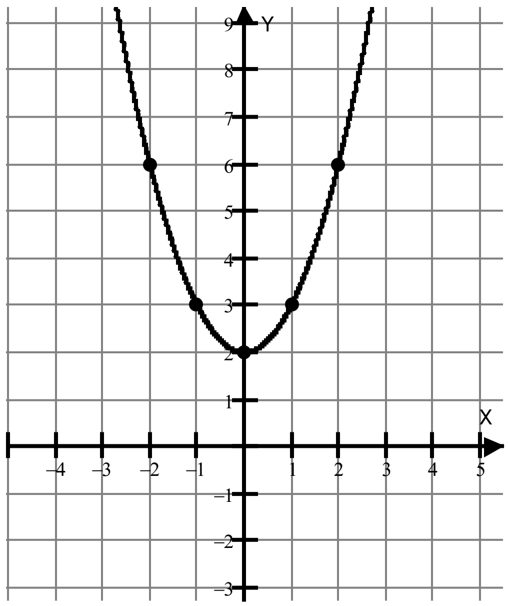
(J, P), (J, L), (J, C), (P, L), (P, C) y (L, C)

En este ejemplo se puede notar que si se cambia el orden de las parejas, no cambia el equipo, (J, L) sería igual que (L, J), el equipo estaría formado por Juan y Luis.

Con los ejemplos anteriores se puede deducir la importancia de ordenar las parejas en algunos casos.

En la asignatura de matemáticas 1 y 2 realizaste gráficas de rectas y parábolas mediante puntos, los cuales son parejas de números ordenados, como se observa a continuación.





La recta se trazó uniendo los puntos (–2, 0), (–1,1), (1, 3), (2, 4) y la parábola uniendo los puntos (–2, 6), (–1, 3), (0, 2), (1, 3) y (2, 6).

En ambos casos, las parejas que forman los puntos llevan un orden preciso, si se llegaran a voltear las coordenadas se trazaría otra gráfica diferente.

¿Sabías que…
Las culturas babilónicas y egipcias (2200 a.C.) fueron precursoras de la geometría aritmetizada. Estas culturas relacionaban el área de una figura plana con su perímetro, conocían métodos para obtener áreas de triángulos y rectángulos, obtenían buenas aproximaciones de pentágonos y hexágonos?

Actividad: 3

Jazmín inventó un código para darles un mensaje oculto a sus amigos, el código está expresado en la tabla y el mensaje es:
(3, 2), (1, 1), (3, 5) (2, 5), (2, 2), (1, 2), (1, 1), (1, 5), (1, 1), (4, 1), (1, 1) (5, 1), (1, 6) (1, 5), (2, 2) (3, 1), (1, 1), (3, 3), (1, 1) (5, 1), (1, 4) (5, 4), (2, 2), (5, 1), (2, 3), (1, 6), (5, 1), (3, 3)

Escribe el mensaje en las líneas, encontrando cada letra que corresponde a las parejas ordenadas, donde el primer elemento se ubica a la derecha y el segundo elemento hacia arriba.

6	N	O	Z		
5	M	P	Y		
4	L	Q	X	W	V
3	K	R	S	T	U
2	J	I	H	G	F
1	A	B	C	D	E
	1	2	3	4	5

____

____

____

____

Evaluación					
Actividad: 3	Producto: Código.			Puntaje:	
Saberes					
Conceptual	Procedimental			Actitudinal	
Identifica la ubicación de las parejas ordenadas.	Obtiene la ubicación de las parejas ordenadas.			Valora la importancia del orden entre elementos de una pareja ordenada.	
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente	

Plano cartesiano.

Las parejas ordenadas tienen dos elementos, cada uno conserva un orden, uno de ellos ocupa el primer lugar y el otro el segundo, si se cambian de lugar varía el sentido.

Los elementos de las parejas ordenadas se representan separados por una coma y encerrados entre paréntesis, como por ejemplo:

$$(-2, 0), (-1,1), (1, 3), (2, 4)$$

Si se toma la pareja (1, 3) y se cambia el orden, representa otro arreglo diferente: (3, 1).

Las parejas ordenadas formalmente se definen como:

Un *par ordenado* de elementos que se denota con (a, b) es diferente del par ordenado (b, a), a menos que $a=b$.

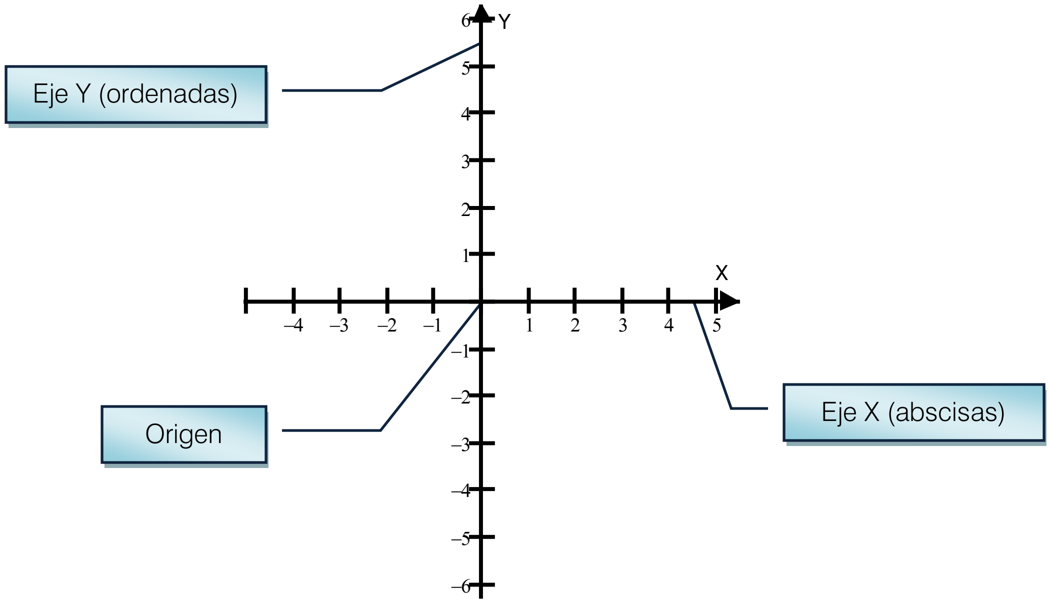
Lo anterior significa que dos pares ordenados son iguales, sólo si tienen los mismos elementos en el mismo orden.

Las gráficas anteriores se trazan mediante *pares ordenados de números reales* en un *sistema de coordenadas cartesianas* (nombre que se le da en honor a René Descartes), el cual se define de la siguiente forma:

René Descartes
(1596- 1650)
Filósofo matemático francés, fue el primero que intentó clasificar las rectas y curvas.

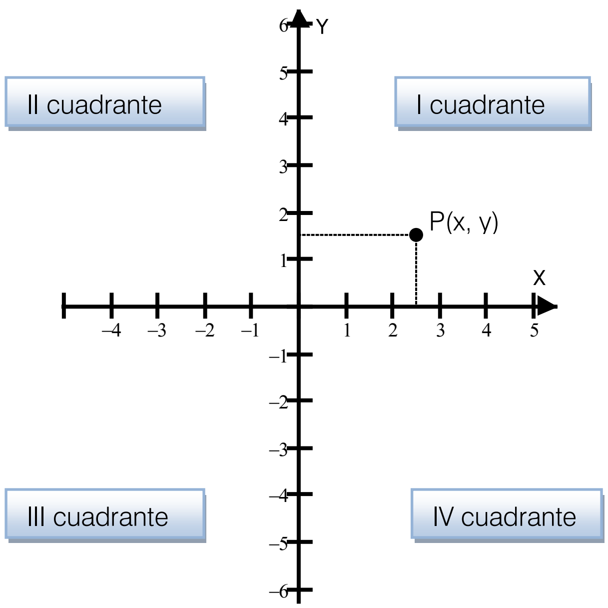
Un par ordenado de números reales (x, y) se pueden representar en el plano mediante *un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares* o *plano* XY, el cual está formado mediante *dos rectas perpendiculares* orientadas, llamadas *ejes coordenados* y la intersección de ellas se le denomina *origen*.

El eje horizontal es llamado eje X o eje de las *abscisas*, y al eje vertical se le conoce como eje Y, o eje de las *ordenadas*.



Como se observa en el sistema de coordenadas, las flechas indican la dirección positiva, en el eje de las X es a la derecha y en el eje Y es hacia arriba.

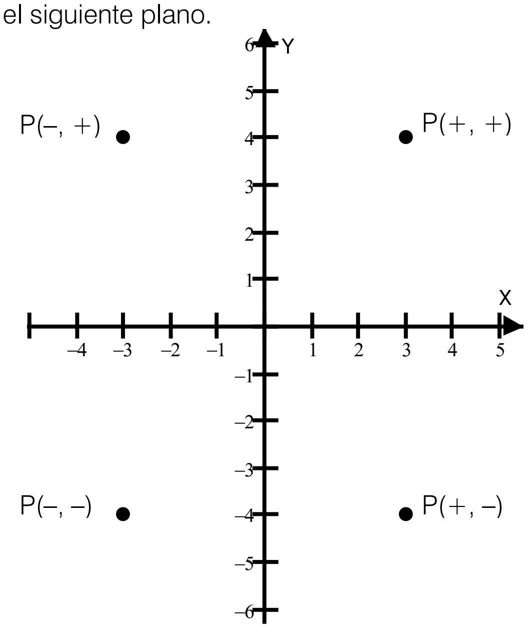
Estos ejes coordenados dividen al plano en cuatro cuadrantes, numerados como se indica en la siguiente figura.



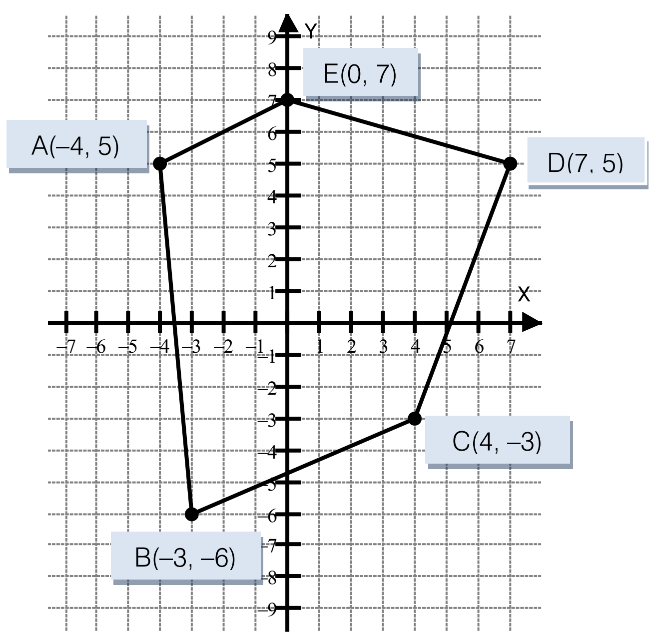
La numeración de los cuadrantes atiende al sentido positivo, el cual es en contra de las manecillas del reloj.

En la figura anterior se localiza el punto P(x, y), el cual se denota mediante una letra mayúscula y entre paréntesis se describe el orden de las coordenadas del punto, éstas son en orden alfabético; tanto la coordenada “x” como la “y” pertenecen al conjunto de los números Reales.

La ubicación de un punto P(x, y) en el plano cartesiano se realiza mediante los signos que poseen cada una de las coordenadas, como se muestra en el siguiente plano.



Ejemplo 1.
En el siguiente plano se trazó una figura geométrica cuyos vértices son los puntos A(–4, 5), B(–3, –6), C(4, –3), D(7, 5) y E(0, 7)

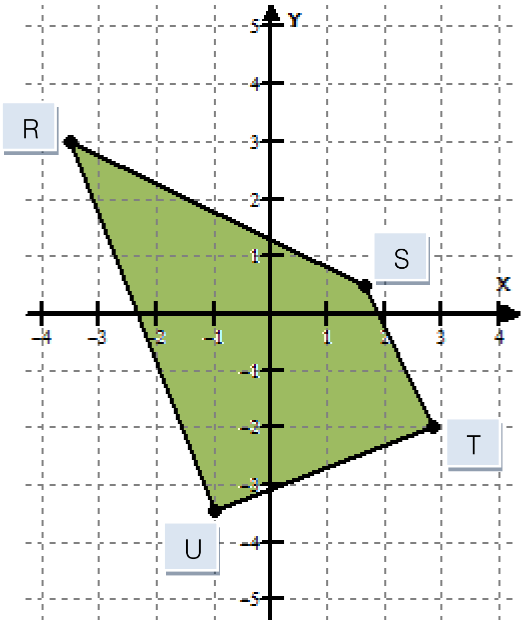


Como habrás notado, los vértices de la figura geométrica están acomodados en el sentido positivo, no siempre es así, en ocasiones te encontrarás con puntos que no respeten el sentido

Las coordenadas de un punto son números reales, pero hasta ahora se ha ejemplificado con números enteros.
A continuación se mostrará un ejemplo en el cual se ubican puntos cuyas coordenadas pueden ser de números enteros ($\mathbb{Z}$), Racionales ($\mathbb{Q}$) e Irracionales ($\mathbb{I}$).

Ejemplo 2.

El terreno de Angelina es un polígono irregular cuyos vértices tienen las siguientes coordenadas: R$\left(-\frac{7}{2}, 3\right)$, S $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{2}\right)$, T$\left(\sqrt{8}, -2\right)$ y U$\left(-1, -2\sqrt{3}\right)$; y para trazarlo en un plano cartesiano ella divide los números, en caso de ser un número racional, y obtener la raíz en el caso de ser un número irracional. Para dibujar los puntos se da la localización aproximada, ya que pueden ser números con extensión decimal infinita.



$$R\left(-\frac{7}{2}, 3\right) = (-3.5, 3)$$

S $$\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{2}\right) \approx (1.7, 0.5)$$

T $$\left(\sqrt{8}, -2\right) \approx (2.8, -2)$$

$$U\left(-1, -2\sqrt{3}\right) \approx (-1, -3.5)$$

"Mientras el Álgebra y la Geometría toman caminos distintos, su avance fue lento y sus aplicaciones limitadas. Pero cuando las dos ciencias se complementaron, se contagiaron una a la otra de vitalidad, y de ahí en adelante marcharon con ritmo rápido hacia la perfección

Joseph Louis Lagrange

"La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles"

René Descartes

Sitios Web recomendados:

http://www.dmae.upct.es/~pepemar/mateprimero/coordenadas/coordenada.htm

Actividad: 4

Localiza en el sistema de coordenadas los siguientes puntos.

1) $G(0,\ 3)$

2) $H\left(-\frac{10}{3},\ 0\right)$

3) $I\left(-\sqrt{5},\ \frac{3}{2}\right)$

4) $J\left(1+\sqrt{3},\ 0\right)$

5) $K\left(\frac{2}{3},\ -\frac{4}{5}\right)$

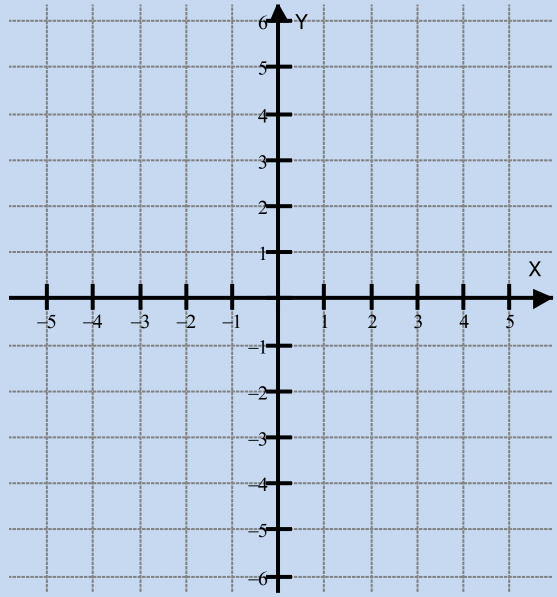
6) $L(1,\ -4)$

7) $M(-6,\ -2)$

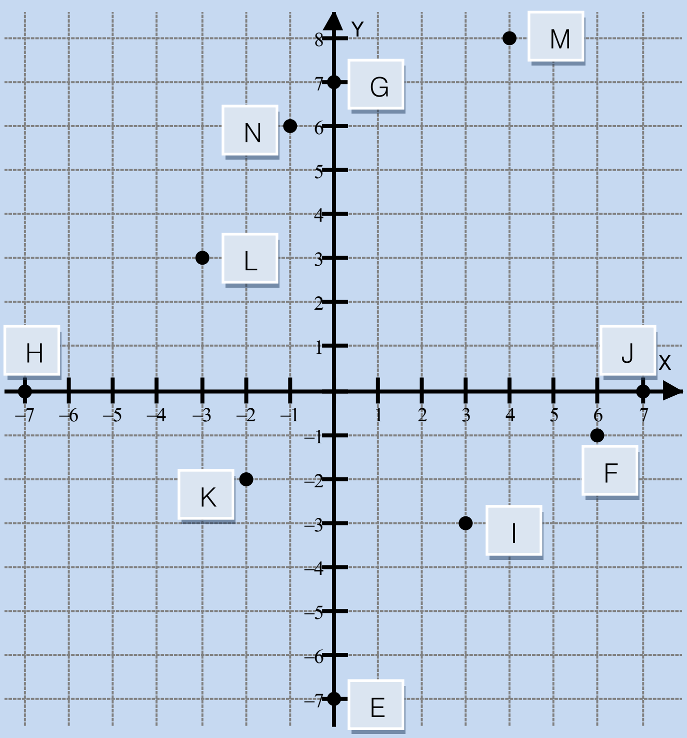
8) $N\left(2\sqrt{7},\ \frac{-12}{5}\right)$

9) $O(0,0)$

10) $P\left(-\sqrt{5},-\sqrt{3}\right)$



Escribe las coordenadas de los siguientes puntos.



E(,)

F(,)

G(,)

H(,)

I (,)

J(,)

K(,)

L (,)

M(,)

N(,)

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 4</td><td colspan="3">Producto: Gráficas.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica la ubicación de puntos en el plano cartesiano.</td><td colspan="3">Grafica puntos en el plano cartesiano.</td><td colspan="2">Muestra disposición para realizar la actividad.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

También se pueden generar gráficas a partir de la información que proporciona una tabla, como se muestra a continuación.

Ejemplo 3.

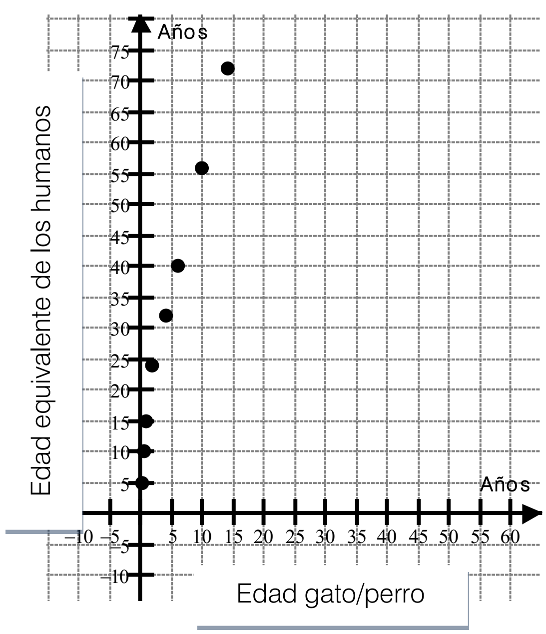
La siguiente información representa una equivalencia aproximada entre la edad de los gatos (o perros) y la de los seres humanos. Los veterinarios a menudo relacionan la edad de un animal con la de un humano comparando el crecimiento relativo de los dientes y huesos, también se considera la madurez. La mayoría de los animales maduran con mayor rapidez que los humanos.

Edad de un gato o perro	Edad aproximada equivalente de un ser humano
3 meses	5 años
6 meses	10 años
1 año	15 años
2 años	24 años
4 años	32 años
6 años	40 años
10 años	56 años
14 años	72 años

Para trazar la gráfica, se identifican los pares ordenados como se muestran a continuación:

$\left(\frac{1}{4}, 5\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 10\right)$, (1, 15), (2, 24), (4, 32), (6, 40), (10, 56), (14, 72)

La primera coordenada de los dos primeros puntos se obtuvo en la conversión de unidades, de meses a años, por lo tanto la gráfica queda de la siguiente forma:

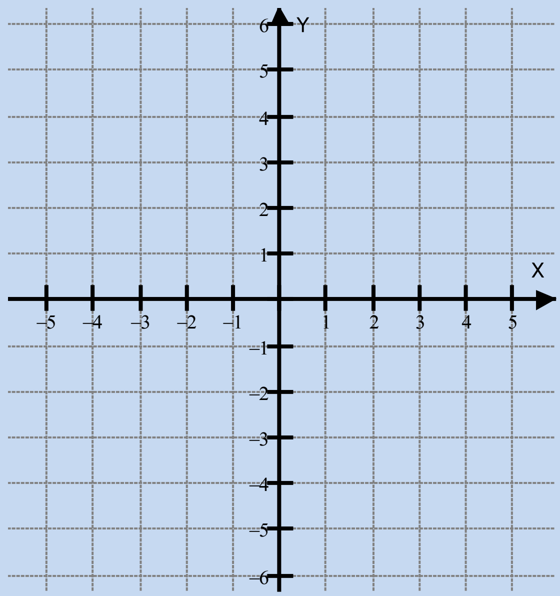


■ Cierre

Actividad: 5

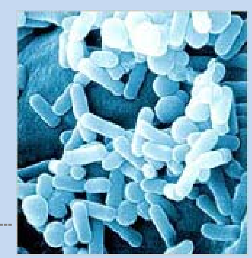
Lee cada uno de los cuestionamientos y responde correctamente.

1. Oscar sale de su casa y camina 4 km hacia el Oeste, se detiene y camina 6 km hacia el Norte, enseguida se dirige 8 km hacia el Este y finalmente lo hace 9 km hacia el Sur.
   a) Dibuja en un plano cartesiano el recorrido completo de Oscar, considerando que su casa está en el origen.

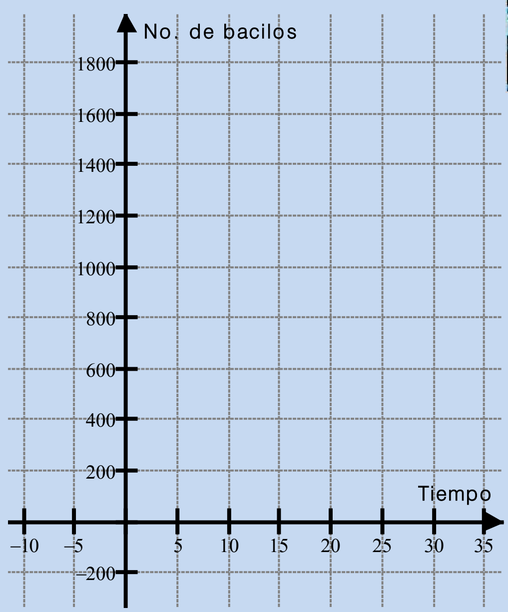


   b) Escribe las coordenadas de cada uno de los puntos donde cambió de dirección.

2. Ana realizó un experimento en la clase de Biología, éste consistió en observar el crecimiento de una colonia de bacilos, registró el tiempo y el número de bacilos presentes en el experimento en la siguiente tabla. Ubica los pares ordenados de la tabla en un plano cartesiano.

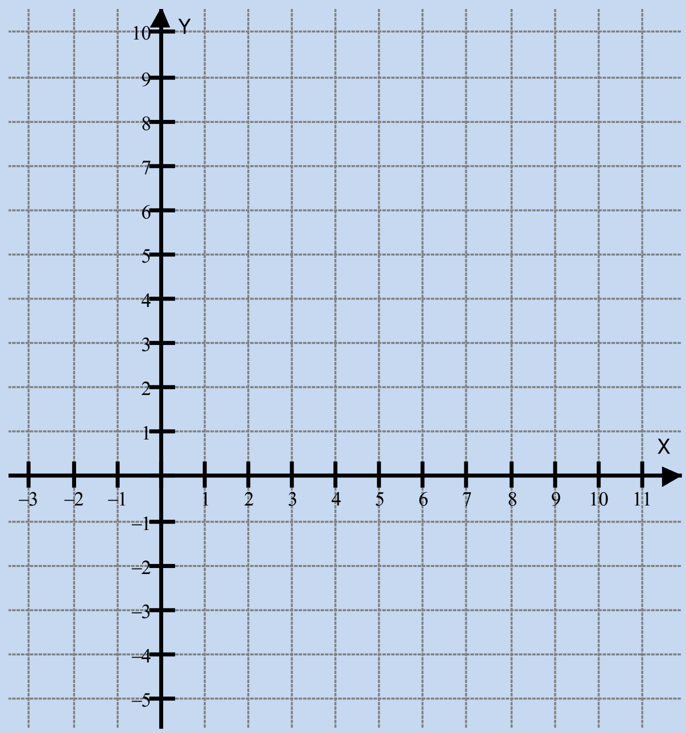


Tiempo (min)	Número de bacilos
6	200
12	300
18	500
24	1000
30	1800



Actividad: 5 (continuación)

3. El terreno de Gilberto, tiene coordenadas (4, 2), (10, 2), (4, 9) y (10, 9).
   a) Ubica el terreno en un sistema de coordenadas.



b) ¿Qué forma tiene el terreno?

c) Calcula el área del terreno.

<table>
<tr><td colspan="6">Evaluación</td></tr>
<tr><td>Actividad: 5</td><td colspan="3">Producto: Problemas de aplicación.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><td colspan="6">Saberes</td></tr>
<tr><td>Conceptual</td><td colspan="3">Procedimental</td><td colspan="2">Actitudinal</td></tr>
<tr><td>Identifica puntos en el plano cartesiano.</td><td colspan="3">Visualiza la ubicación de puntos en el plano cartesiano y grafica.</td><td colspan="2">Aprecia la utilidad de la ubicación de puntos en el plano cartesiano.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Secuencia didáctica 2.
Lugar geométrico.

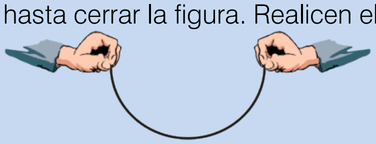
Inicio

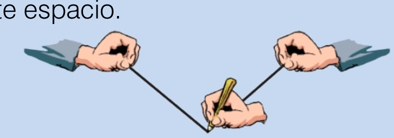
Actividad: 1

En binas realiza los siguientes problemas.

1. Mario amarró una piedra al extremo de una cuerda y empezó a darle vueltas por encima de su cabeza, dibujen la figura que describe la piedra.
   a) ¿Qué figura trazaron?
   b) Qué característica tienen cada uno de los puntos que trazaron en el dibujo con respecto al extremo que sujeta Mario?

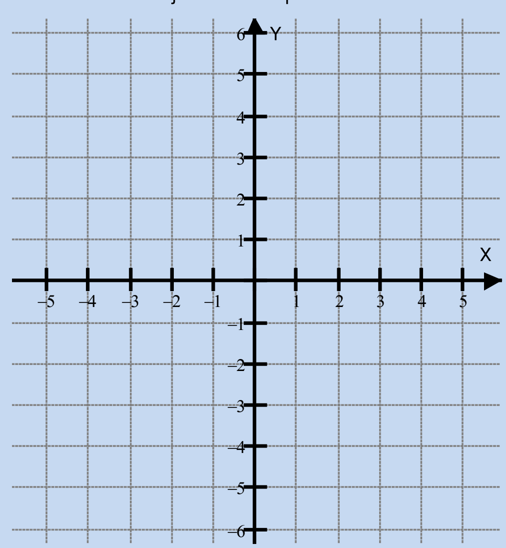
2. Sujeten un cordón de 10 cm de longitud en los dos extremos sin estirarlo, como muestran las figuras, a continuación tomen un lápiz y estiren el cordón, muevan el lápiz con el cordón estirado y vayan dibujando hasta cerrar la figura. Realicen el trazo en este espacio.





¿Qué figura trazaron?
¿Qué característica tienen cada uno de los puntos que trazaron en el dibujo con respecto los extremos fijos?

3. En matemáticas 1 graficaste ecuaciones de rectas, utiliza uno de los métodos que aprendiste para graficar la ecuación $2x + y - 3 = 0$



Evaluación					
Actividad: 1	Producto: Actividades prácticas.			Puntaje:	
Saberes					
Conceptual	Procedimental			Actitudinal	
Identifica puntos que describen una situación o problema.	Determina los puntos y la gráfica de una situación o problema.			Muestra interés al realizar la actividad.	
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente	

Desarrollo

En la secuencia anterior manejaste la correspondencia entre números reales, para formar pares ordenados y ubicarlos en un sistema de coordenadas, con ello y con tus conocimientos de Álgebra podrás resolver problemas geométricos, así como también podrás representar gráficamente ecuaciones.

Cuando un problema se te dificulte, siempre es recomendable comenzar trazando un sistema de ejes coordenados y visualizar la información que se posee, esto es: puntos, segmentos, curvas, etc. todo aquello que es parte del problema y ayuda a desarrollar una estrategia de solución.

Como su nombre lo indica, la Geometría Analítica es una fusión del *Álgebra* y la *Geometría elemental*, y para esclarecer esta fusión se requiere conocer su concepto fundamental:

Concepto de lugar geométrico.

Se denomina *lugar geométrico* al conjunto de puntos que cumplen con una misma condición o propiedad. Éste puede ser una línea curva, una línea recta, un plano, una superficie curva, etc.

En esta asignatura sólo se abordarán las líneas rectas y curvas, en el nivel superior conocerás el manejo del plano, superficie curva, entre otras.

Para demostrar que una figura es un lugar geométrico es necesario demostrar que:
1. Todos los puntos de la figura tienen la propiedad o condición mencionada.
2. Todos los puntos que poseen dicha propiedad pertenecen a la figura.

Por lo anterior se puede decir que en Geometría Analítica se pueden presentar dos problemas fundamentales:
1. Dada la ecuación encontrar el lugar geométrico que la representa.
2. Dado el lugar geométrico encontrar la ecuación que lo representa.

Obtención del lugar geométrico a partir del lenguaje verbal.

Cuando se desea trazar un lugar geométrico apoyándose de una oración, es necesario encontrar la condición o propiedad que deben cumplir los puntos y comprobar que así sucede para todos ellos, como se muestra a continuación:

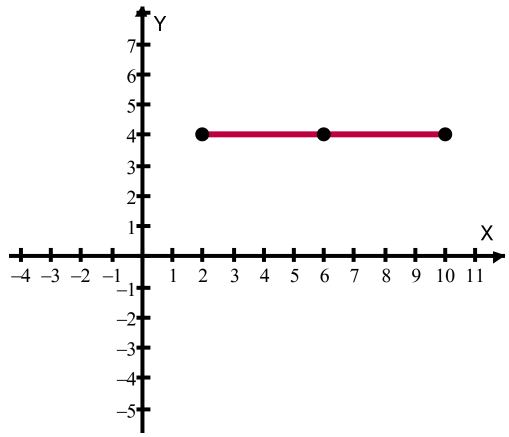
Ejemplo 1.
Dibuja en un segmento de longitud 8 y encuentra todos los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Primero hay que identificar la condición para que los puntos pertenezcan al lugar geométrico que se pretende dibujar, y dicha condición es: que los puntos deben de equidistar de los extremos.

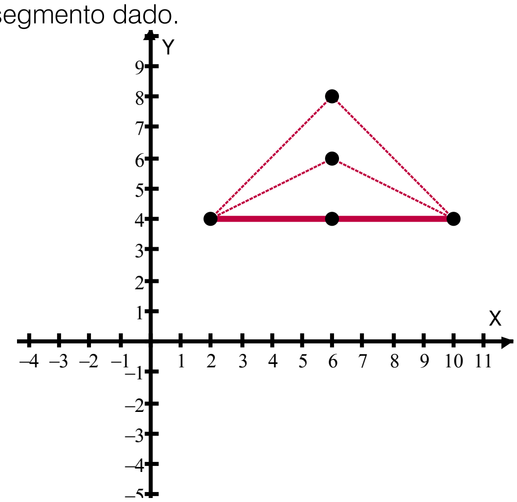
Una primera idea para construir, es dibujar el segmento de tamaño 8 y colocar un punto que equidiste de los extremos, el que más se conoce es el punto medio del mismo.

Glosario:

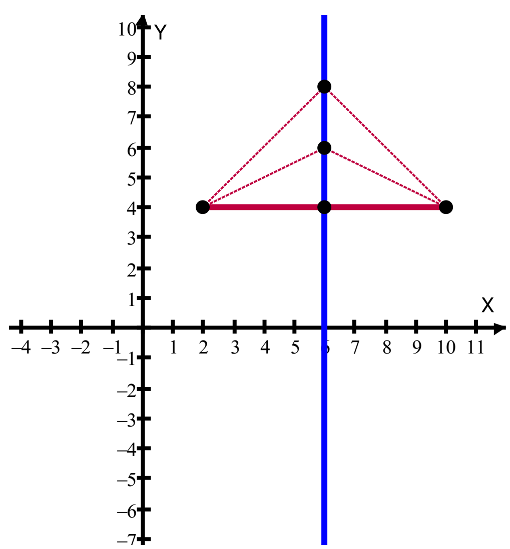
Equidistar: Cuando dos o más puntos o cosas están a igual distancia de otro determinado punto o cosa.



Posteriormente, se empiezan a buscar otros puntos que estén a la misma distancia, una idea es formando un triángulo isósceles cuya base es el segmento dado.

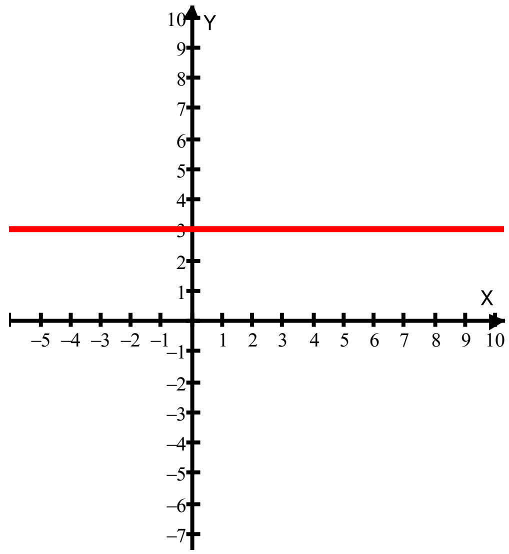


Así que el lugar geométrico del conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento es la mediatriz del mismo y su gráfica es:

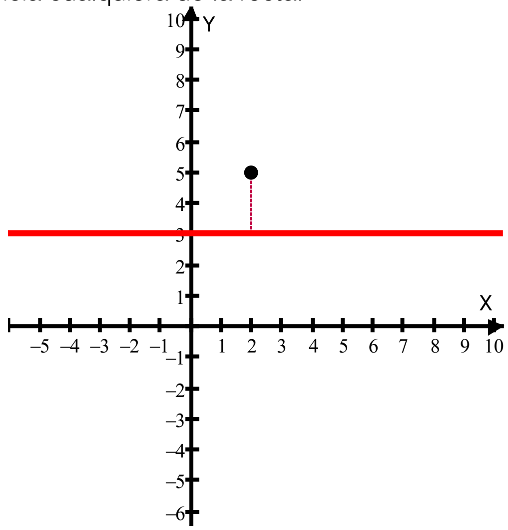


Ejemplo 2.
Dibuja todos los puntos del plano que equidisten de una recta dada.

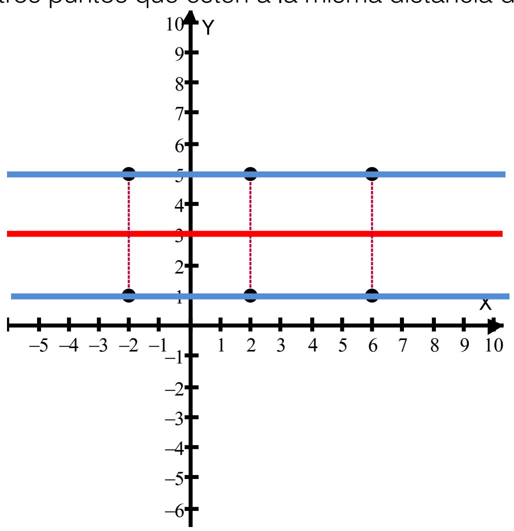
Primero trazamos una recta cualquiera, y por conveniencia se traza horizontal.



Luego se ubica un punto a una distancia cualquiera de la recta.



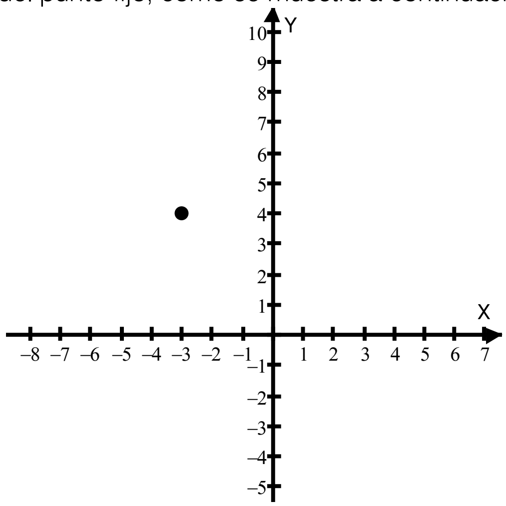
A continuación se empieza a trazar otros puntos que estén a la misma distancia de la recta.

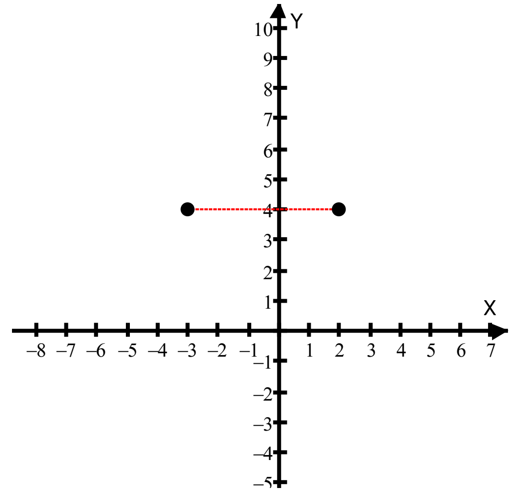


Por lo tanto, el lugar geométrico del conjunto de puntos que equidistan de una recta son los puntos que dibujan dos retas paralelas a la recta dada.

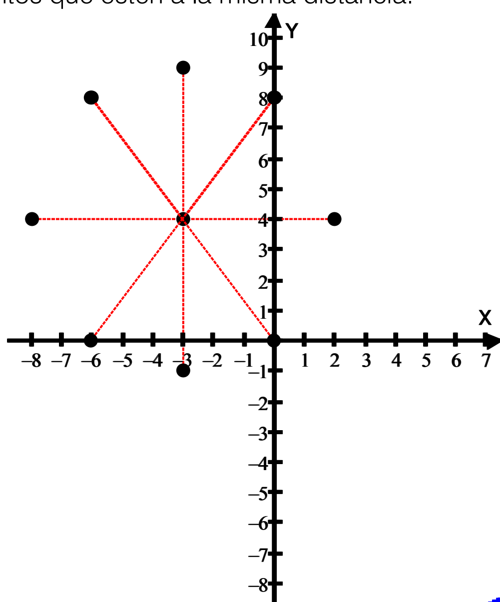
Ejemplo 3.
Dibuja los puntos del plano equidistantes de un punto fijo.

Primero se dibuja el punto fijo, posteriormente se dibuja un punto a una distancia determinada, conviene hacerlo a la misma altura del punto fijo, como se muestra a continuación:

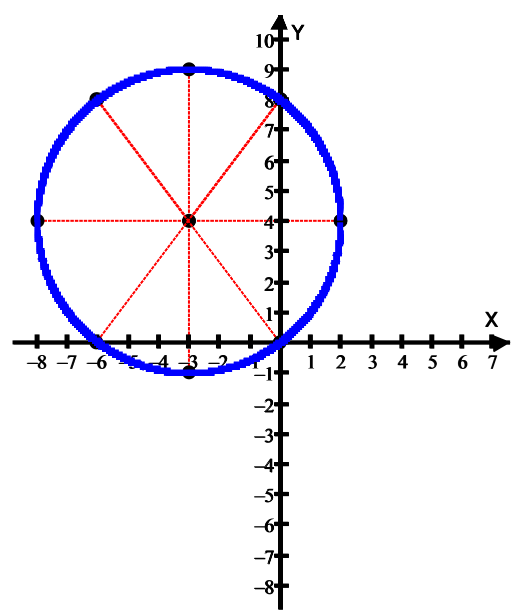




Posteriormente se ubican varios puntos que estén a la misma distancia.



Con el dibujo anterior se visualiza que el lugar geométrico del conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo es una circunferencia.



Actividad: 2

Traza el lugar geométrico del conjunto de puntos que cumple con las siguientes condiciones:

1. Equidistan de los lados que forman a un ángulo.

2. Equidistan de dos puntos fijos.

3. Equidistan de una recta fija y de un punto fijo.

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 2</td><td colspan="3">Producto: Dibujo.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica diferentes lugares geométricos, dada la expresión verbal.</td><td colspan="3">Traza lugares geométricos dada la expresión verbal.</td><td colspan="2">Realiza la actividad con entusiasmo.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Obtención del lugar geométrico a partir del lenguaje algebraico.

En esta sección se dibujarán lugares geométricos a partir de conocer la ecuación, como se ejemplifica a continuación.

Ejemplo 1.
Trazar el lugar geométrico que describe la ecuación $3x + y - 1 = 0$.
Primero se despeja la variable "y" de la ecuación.

$$y = -3x + 1$$

Ahora se puede dar valores a la variable "x" y sustituirlos en el despeje para encontrar los puntos que satisfacen la ecuación, y para ello se puede auxiliar de una tabla.

x	y
-2	
-1	
0	
1	

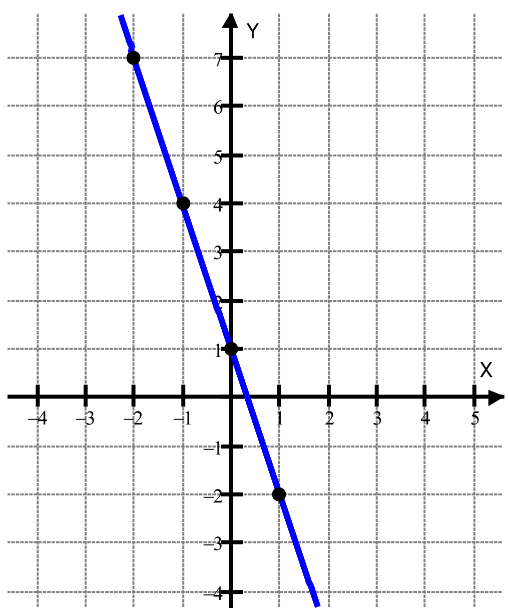
$$y = -3(-2) + 1 = 7$$
$$y = -3(-1) + 1 = 4$$
$$y = -3(0) + 1 = 1$$
$$y = -3(1) + 1 = -2$$

Por lo tanto, los puntos encontrados son:

x	y
-2	7
-1	4
0	1
1	-2

(-2, 7)
(-1, 4)
(0, 1)
(1, -2)

Entonces, el lugar geométrico que describe la ecuación es una recta.



Ejemplo 2.

Trazar el lugar geométrico que describe la ecuación $2x^2 + y - 5 = 0$.
Al igual que el ejemplo anterior, se despeja la variable "y" de la ecuación.

$$y = -2x^2 + 5$$

Ahora se puede dar valores a la variable "x" y sustituirlos en el despeje para encontrar los puntos que satisfacen la ecuación.

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

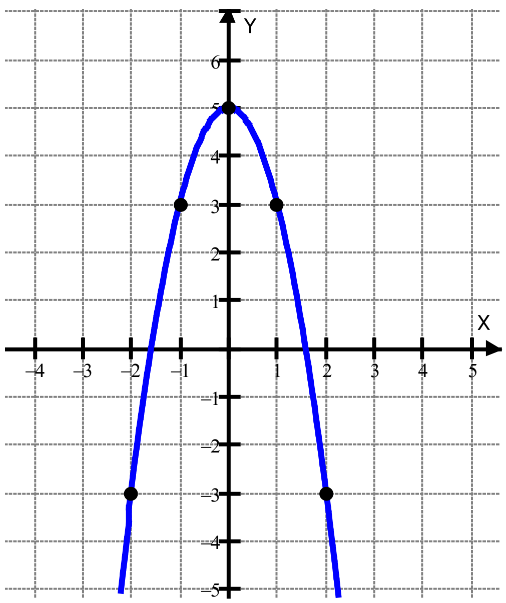
$$y = -2(-2)^2 + 5 = -3$$
$$y = -2(-1)^2 + 5 = 3$$
$$y = -2(0)^2 + 5 = 5$$
$$y = -2(1)^2 + 5 = 3$$
$$y = -2(2)^2 + 5 = -3$$

Por lo tanto, los puntos encontrados son:

x	y
-2	7
-1	4
0	1
1	-2
2	-5

(-2, 3)
(-1, -3)
(0, 5)
(1, 3)
(2, -3)

Entonces, el lugar geométrico que describe la ecuación es una parábola.



Ejemplo 3.

Trazar el lugar geométrico del conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $4x^2 + 4y^2 - 100 = 0$
En esta ecuación se tiene sólo una variable "y", por lo que se puede utilizar el despeje, aunque esté elevada al cuadrado, en otro caso, se tendría que utilizar un método de factorización, éste lo abordarás más adelante.

A continuación visualizarás paso a paso el despeje.

$$4x^2 + 4y^2 - 100 = 0$$

$$4y^2 = -4x^2 + 100$$

$$y^2 = \frac{-4x^2 + 100}{4}$$

$$y^2 = -x^2 + 25$$

$$y = \pm\sqrt{-x^2 + 25}$$

Ahora se puede dar valores a la variable "x" y sustituirlos en el despeje para encontrar los puntos que satisfacen la ecuación.

x	y
-5	0
-4	±3
-3	±4
-2	±4.6
-1	±4.9
0	±5
1	±4.9
2	±4.6
3	±4
4	±3
5	0

$y = \pm\sqrt{-(-5)^2 + 25} = 0$

$y = \pm\sqrt{-(-4)^2 + 25} = \pm 3$

$y = \pm\sqrt{-(-3)^2 + 25} = \pm 4$

$y = \pm\sqrt{-(-2)^2 + 25} \approx \pm 4.6$

$y = \pm\sqrt{-(-1)^2 + 25} \approx \pm 4.9$

$y = \pm\sqrt{-(0)^2 + 25} = \pm 5$

$y = \pm\sqrt{-(1)^2 + 25} \approx \pm 4.9$

$y = \pm\sqrt{-(2)^2 + 25} \approx \pm 4.6$

$y = \pm\sqrt{-(3)^2 + 25} = \pm 4$

$y = \pm\sqrt{-(4)^2 + 25} = \pm 3$

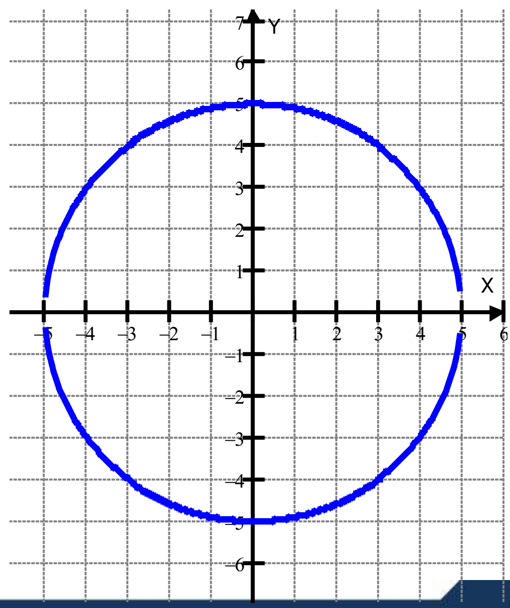
$y = \pm\sqrt{-(5)^2 + 25} = 0$

Por lo tanto, los puntos encontrados son:

x	y
-5	0
-4	±3
-3	±4
-2	±4.6
-1	±4.9
0	±5
1	±4.9
2	±4.6
3	±4
4	±3
5	0

(-5, 0)
(-4, 3) (-4, -3)
(-3, 4) (-3, -4)
(-2, 4.6) (-2, -4.6)
(-1, 4.9) (-1, -4.9)
(0, 5) (0, -5)
(1, 4.9) (1, -4.9)
(2, 4.6) (2, -4.6)
(3, 4) (3, -4)
(4, 3) (4, -3)
(5, 0)

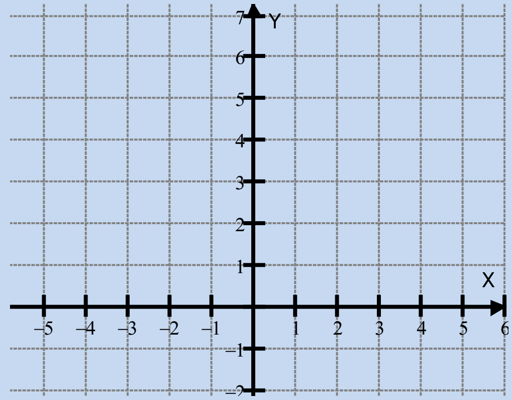
Entonces, el lugar geométrico que describen los puntos encontrados es una circunferencia.



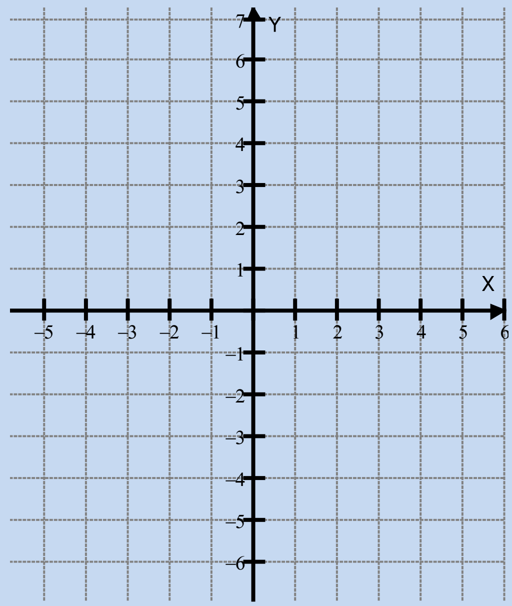
Actividad: 3

Traza el lugar geométrico del conjunto de puntos que satisface la ecuación:

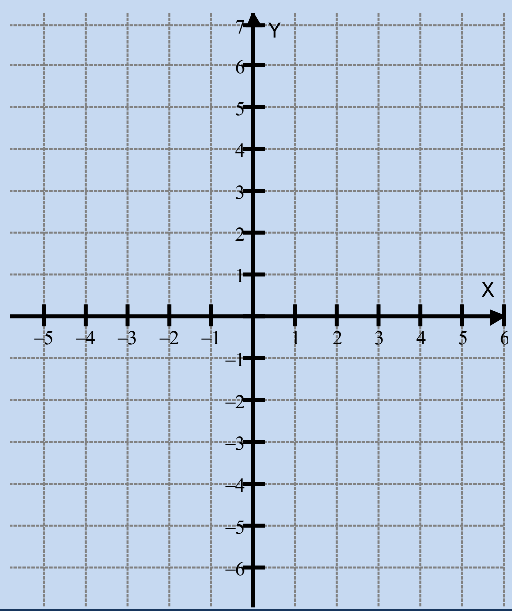
1) $y - 5 = 0$



2) $x + 2 = 0$

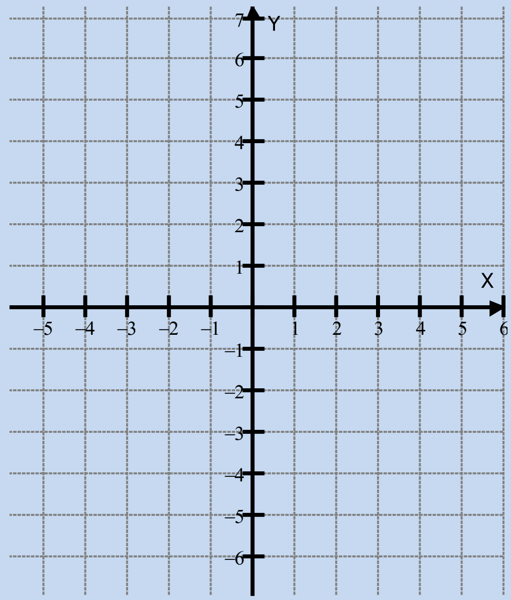


3) $x + 5y - 10 = 0$

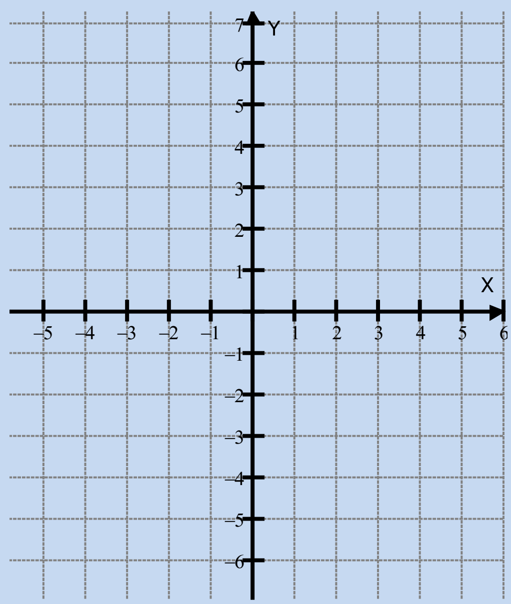


Actividad: 3 (continuación)

4) $x - y - 4 = 0$

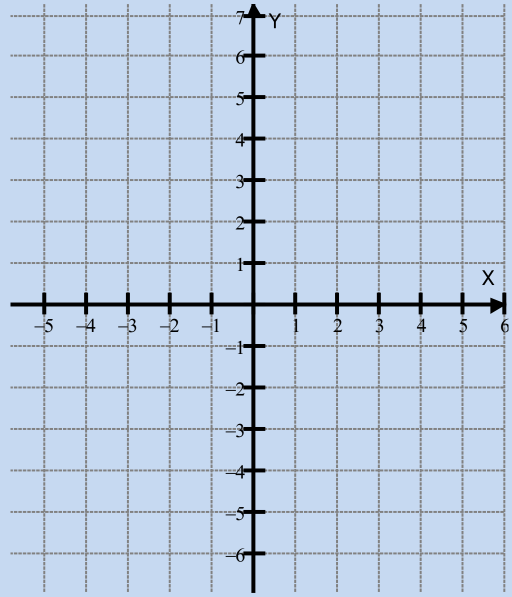


5) $x^2 - 8y = 0$

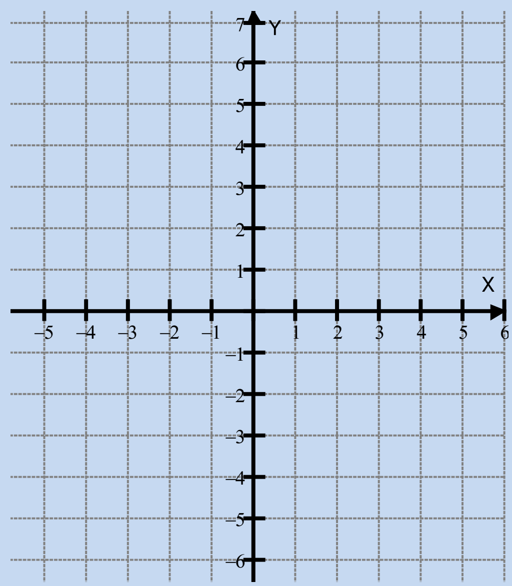


Actividad: 3 (continuación)

6) $y^2 - 16x = 0$



7) $x^2 + y^2 - 16 = 0$



Evaluación					
Actividad: 3	Producto: Gráfica.			Puntaje:	
Saberes					
Conceptual	Procedimental			Actitudinal	
Identifica el lugar geométrico dada la ecuación.	Traza la gráfica de lugares geométricos dada la ecuación.			Aprecia la facilidad de graficar lugares geométricos a partir de la ecuación.	
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente	

■ Cierre

Actividad: 4

Desarrolla lo que se pide en cada sección.

Traza cada uno de los lugares siguientes, identificando el lugar geométrico que representan.

1) Los puntos del plano que equidistan dos unidades de la recta $x + 4 = 0$

2) Los puntos que equidistan de (0,0) en 4 unidades.

3) Los puntos que equidistan de los puntos (3, 0) y (-3, 0)

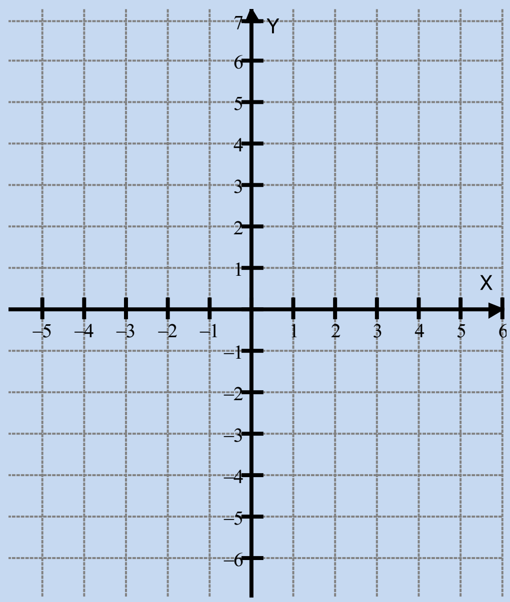
4) Los puntos cuya suma de distancias a los puntos (5, 0) y (-5, 0).

Actividad: 4 (continuación)

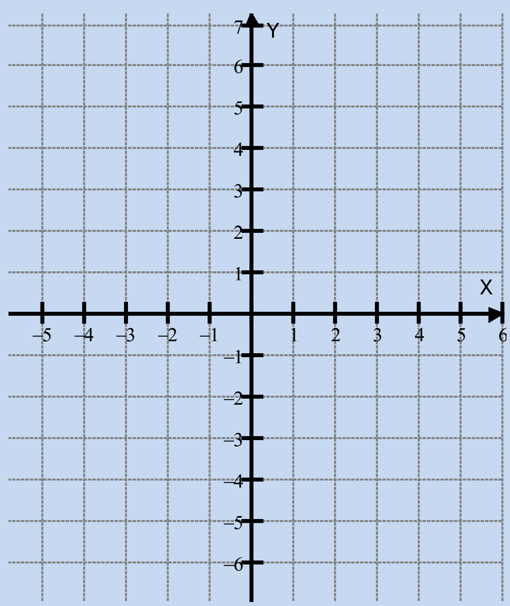
5) Los puntos que se mueven de tal manera que su coordenada “x” es siempre igual a 3.

Traza el lugar geométrico del conjunto de puntos que satisface la ecuación:

1) $3x + 4y - 8 = 0$



2) $4x^2 + 9y^2 - 225 = 0$



<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 4</td><td colspan="3">Producto: Gráficas.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Determina la gráfica de lugares geométricos dada la ecuación o el lenguaje verbal.</td><td colspan="3">Traza la gráfica de lugares geométricos dada la ecuación o el lenguaje verbal.</td><td colspan="2">Aprecia la facilidad de realizar gráficas de lugares geométricos, conocida la ecuación o el lenguaje verbal.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo.

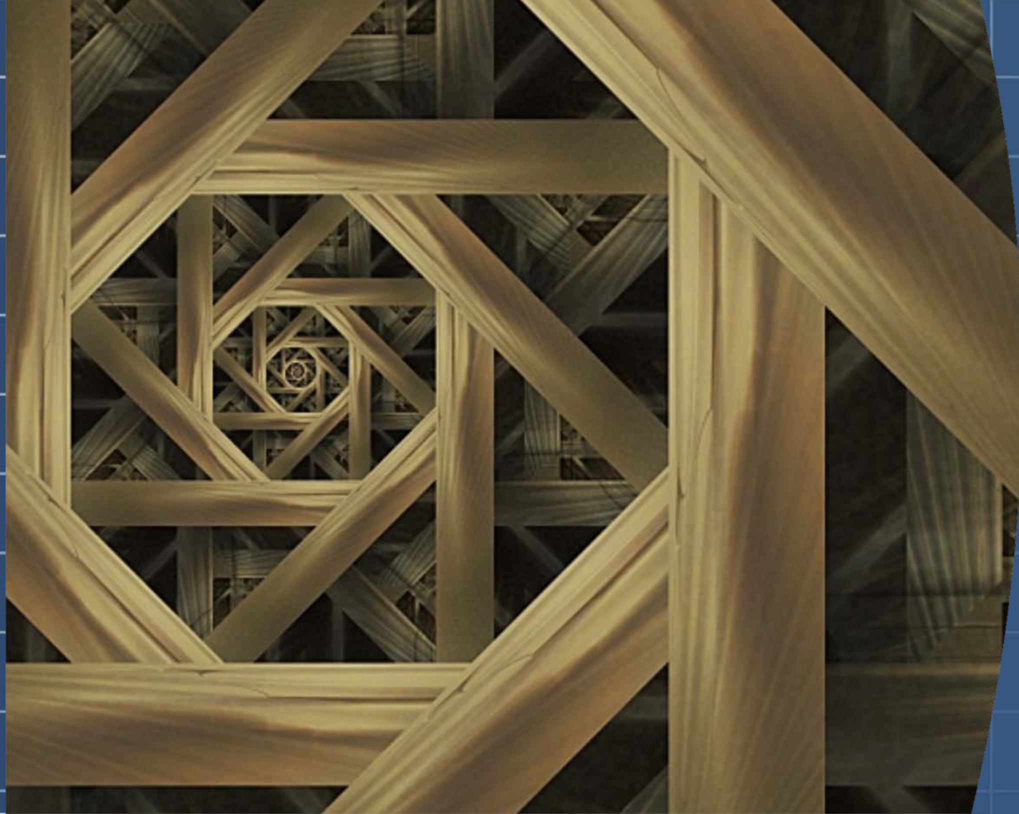
Galileo Galilei

Las matemáticas son una gimnasia del espíritu y una preparación para la filosofía.

Isócrates

"Con números se puede demostrar cualquier cosa"

Carlyle



BLOQUE 2

Aplica las propiedades de segmentos rectilíneos y polígonos

Competencias disciplinares básicas:

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Unidad de competencia:

- Construye e interpreta modelos relacionados con segmentos y polígonos, al resolver problemas derivados de situaciones reales, hipotéticas o teóricas.
- Cuantifica y representa magnitudes en segmentos y polígonos identificados en situaciones reales, hipotéticas o teóricas.
- Interpreta diagramas y textos con símbolos propios de segmentos y polígonos.

Atributos a desarrollar en el bloque:

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
8.1 Propone maneras de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
8.3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Tiempo asignado: 10 horas

Secuencia didáctica 1.
Segmentos rectilíneos.

Inicio

Actividad: 1

Realiza los siguientes cuestionamientos:

1. Describe con tus palabras qué es un segmento.

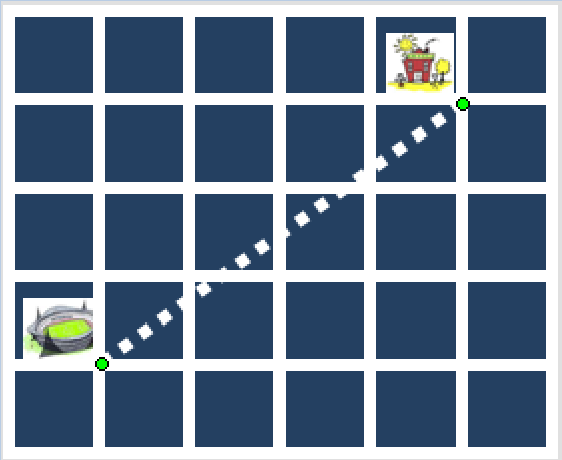
2. ¿Qué entiendes por segmento dirigido?

3. Describe cuál es la utilidad de los segmentos en los siguientes contextos:
   a) Escuela:

   b) Casa:

   c) Deporte:

4. Observa el siguiente croquis y, siguiendo la línea punteada, calcula la distancia que hay entre el estadio y la escuela.



Evaluación						
Actividad: 1	Producto: Mapa.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Describe en el mapa la ubicación de algunos lugares.	Ubica la distancia y el sentido de lugares específicos.			Muestra interés al realizar la actividad.		
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

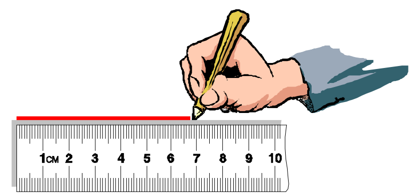
Desarrollo

En la Geometría Analítica se estudia algebraicamente las figuras geométricas con base en los lugares geométricos que las componen, para ello se establecen las figuras en un plano cartesiano por medio de la conexión de puntos y la distancia entre ellos.

En el bloque anterior se estableció el sistema de coordenadas cartesianas y la ubicación de puntos, también se mencionó sobre los lugares geométricos, y en ellos está implícito el concepto de distancia.

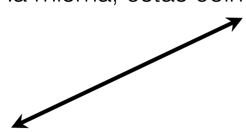
En algún momento has utilizado una regla para trazar líneas o medir objetos, por lo general se establece el inicio en el cero y se procede a trazar la línea o medir.

La porción de línea que se traza se conoce como segmento, el cual posteriormente se definirá formalmente, y la medida que se hace de los mismos se le conoce como longitud.



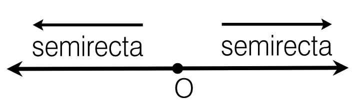
Definición de segmento rectilíneo.

Para poder definir el concepto de segmento rectilíneo, primero se debe recordar la idea que se tiene de *recta* o *línea recta* (sin llegar a la definición formal como lugar geométrico): "si una parte cualquiera de la recta se coloca con el mismo ángulo de inclinación sobre otra parte de la misma, éstas coinciden en todos sus puntos.



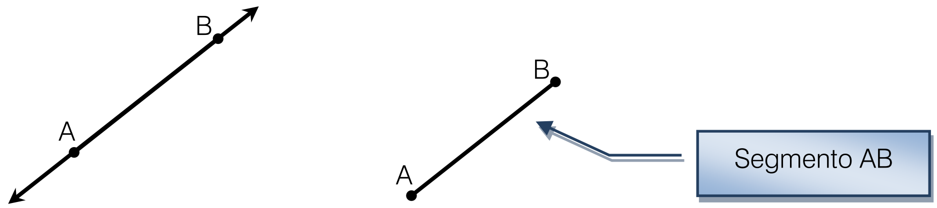
Una recta es infinita por sus dos extremos, para ello, al dibujarla se le coloca una flecha en ambos extremos, para dar la idea de extenderse infinitamente.

El punto O divide a la recta en dos *semirrectas* opuestas. El punto O es el origen de las semirrectas como se observa en la figura.



A la porción de recta comprendida entre dos puntos que se llaman *extremos*, se le conoce como *segmento rectilíneo* o simplemente *segmento.*

Los *extremos* del segmento son puntos que forman parte del segmento y se denotan mediante una letra mayúscula, como se muestra a continuación.



La longitud del segmento es la distancia que existe entre sus extremos y se escribe $\overline{AB}$.

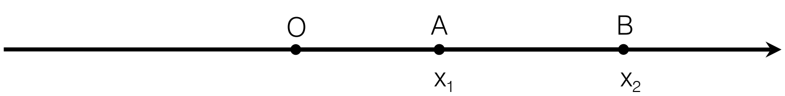
Tipos de segmentos.

Nombre	Figura	Notación	Descripción	Equivalencia
Segmento no dirigido	A ●———● B	$\overline{AB}$ ó $\overline{BA}$	Es indistinto el orden de los puntos.	$\overline{AB} = \overline{BA}$
Segmento dirigido	A ●———→ B	$\overrightarrow{AB}$	Inicia en el punto A y termina en el punto B	$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
	A ←———● B	$\overrightarrow{BA}$	Inicia en el punto B y termina en el punto A	$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Otro tipo de clasificación es cuando se tienen dos o más segmentos y son:

Nombre	Figura	Descripción
Segmentos consecutivos	A ●———● B ——● C	Son los que tienen un extremo común.
Segmentos consecutivos alineados o adyacentes	A ●———● B ——● C	Son dos o más segmentos consecutivos alineados, debido a que pertenecen a la misma recta.

Ahora se encontrará la forma de calcular la longitud de un segmento, considerando primero el sistema coordenado lineal horizontal (una dimensión), o mejor conocido como recta numérica. Para realizar la demostración se tomarán los siguientes puntos:



El punto O es el origen de la recta, la coordenada del punto A es x_1 y la coordenada del punto B es x_2. Para encontrar la longitud del segmento AB, se define:

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$$

De donde: $\overline{OA} = x_1$ y $\overline{OB} = x_2$

Entonces, sustituyendo los valores de los segmentos, se tiene:

$$x_1 + \overline{AB} = x_2$$

Finalmente se despeja la longitud del segmento AB.

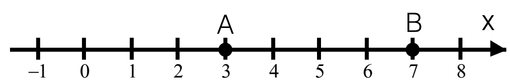
$$\overline{AB} = x_2 - x_1$$

Es necesario recordar que la longitud es la distancia entre los extremos del segmento y es una magnitud que no es negativa, por lo que se debe añadir el concepto de valor absoluto a la fórmula anterior, para obtener siempre un resultado positivo.

La longitud del segmento AB es igual a la coordenada del punto final menos la coordenada del punto inicial

$$\overline{AB} = |x_2 - x_1|$$

Ejemplo 1.
Encontrar la longitud del segmento AB, cuya gráfica es:

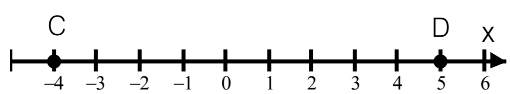


Para ello, se escribe la fórmula $\overline{AB} = |x_2 - x_1|$ y se sustituyen las coordenadas.

$$\overline{AB} = |x_2 - x_1|$$
$$\overline{AB} = |7 - 3|$$
$$\overline{AB} = |4|$$
$$\overline{AB} = 4$$

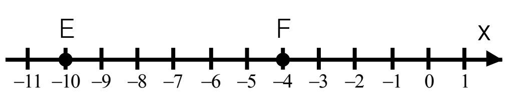
En la gráfica se puede contar el número de unidades, y estas corresponden a las obtenidas de forma algebraica.

Ejemplo 2.
Encontrar la longitud del segmento CD, si los puntos son C(-4) y D(5).



$$\overline{CD} = |x_2 - x_1|$$
$$\overline{CD} = |5 - (-4)|$$
$$\overline{CD} = |5 + 4|$$
$$\overline{CD} = |9| = 9$$

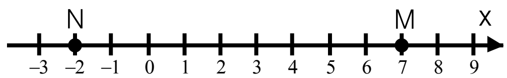
Ejemplo 3.
Encontrar la longitud del segmento EF, si los puntos son E(-10) y F(-4).



$$\overline{EF} = |x_2 - x_1|$$
$$\overline{EF} = |-4 - (-10)|$$

$$\overline{EF} = \left| -4 + 10 \right|$$
$$\overline{EF} = \left| 6 \right| = 6$$

Ejemplo 4.
Encontrar la longitud del segmento MN, si su gráfica es:



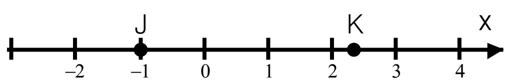
$$\overline{MN} = \left| x_2 - x_1 \right|$$

Puede suceder que las coordenadas se inviertan en la fórmula, pero independientemente el orden en que se tomen, el resultado es el mismo, dado que la distancia no tiene sentido, la distancia de MN es igual a la distancia de NM.

$$\overline{MN} = \left| -2 - 7 \right| \quad \text{ó} \quad \overline{NM} = \left| 7 - (-2) \right|$$
$$\overline{MN} = \left| -9 \right| \qquad \overline{NM} = \left| 7 + 2 \right|$$
$$\overline{MN} = 9 \qquad \overline{NM} = \left| 9 \right| = 9$$

Ejemplo 5.

Calcular la distancia entre los puntos J(-1) y $K\left(\frac{7}{3}\right)$.

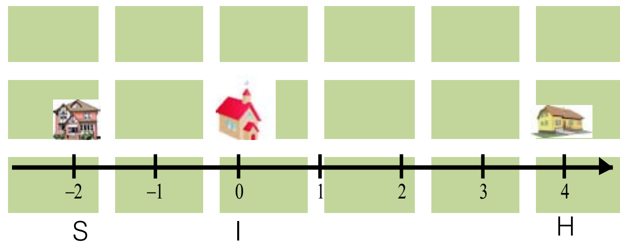


$$\overline{JK} = \left| x_2 - x_1 \right|$$
$$\overline{JK} = \left| \tfrac{7}{3} - (-1) \right|$$
$$\overline{JK} = \left| \tfrac{7}{3} + 1 \right|$$
$$\overline{JK} = \left| \tfrac{10}{3} \right|$$
$$\overline{JK} = \tfrac{10}{3} \approx 3.3$$

Ejemplo 6.
La casa de Susana está a 6 Km de la casa de Hugo y a 2 Km de la Iglesia, como se ve en el croquis. ¿A qué distancia se encuentra la casa de Hugo de la Iglesia?

Sin la información del croquis, se tendría que suponer que la casa de Hugo podría estar a la izquierda de la casa de Susana, por ello es necesaria la información que está en el dibujo.

Ahora se ubica el sistema de coordenadas lineal horizontal, para ubicar el origen, el cual corresponde a la Iglesia, como se muestra en la siguiente figura.



Para resolverlo algebraicamente, se utilizará la letra S para ubicar el punto donde se encuentra la casa de Susana; la letra I para la ubicación de la iglesia y la letra H para la casa de Hugo.

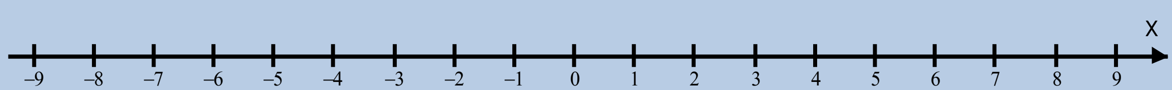
$$\overline{SI} + \overline{IH} = \overline{SH}$$
$$2 + \overline{IH} = 6$$
$$\overline{IH} = 6 - 2$$
$$\overline{IH} = 4$$

Para resolverlo se puede hacer una resta sencilla observando el dibujo, sólo que hay que establecer el proceso algebraico para que posteriormente se generalice y así tener la idea de cómo resolver problemas más complejos, en las siguientes secuencias.

Actividad: 2

Lee con detenimiento los siguientes cuestionamientos y utiliza la fórmula de longitud de un segmento para darles solución.

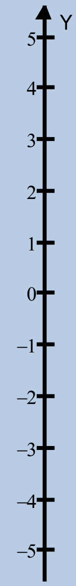
1. Localiza en el sistema de coordenadas lineal horizontal los siguientes puntos: $A(4)$, $B(-9)$, $C\left(\frac{1}{2}\right)$, $D\left(-\frac{7}{4}\right)$ y $E\left(2\sqrt{2}\right)$. Además, nómbralos con la letra correspondiente.



2. Calcula la longitud de los segmentos AB, BC, DA, EB y BE.

Actividad: 2 (continuación)

3. Localiza en el sistema de coordenadas lineal vertical los siguientes puntos: $R(0)$, $S(-5)$, $T\left(5/4\right)$, $U(-1)$ y $V\left(-\sqrt{5}\right)$. Además, nómbralos con la letra correspondiente.



4. Utiliza los puntos anteriores para calcular la longitud de los segmentos RT, TU, RV, US y UV.

5. La coordenada del punto K es $x_1 = -6$. Se sabe que el punto L se encuentra a una distancia de 5 unidades de K. Calcula algebraicamente la coordenada de L, ¿Cuántas respuestas correctas existen y por qué?

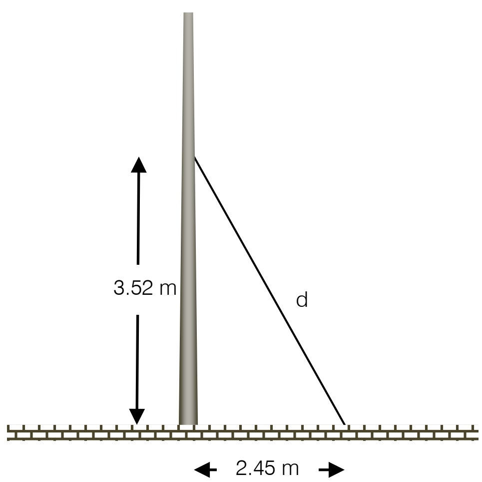
<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 2</td><td colspan="3">Producto: Graficas.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica puntos en el sistema coordenado lineal.</td><td colspan="3">Ubica puntos en el sistema coordenado lineal y calcula longitudes de segmentos.</td><td colspan="2">Realiza la actividad mostrando interés en la misma y externa sus dudas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.

Como se vio en el bloque anterior, los lugares geométricos dependen del concepto de *distancia* entre dos puntos, el cual es la longitud del segmento que los une, es por ello que se requiere desarrollar la fórmula para obtener la distancia entre dos puntos del plano cartesiano.

Para poder encontrar la fórmula se requiere aplicar el Teorema de Pitágoras. Por lo pronto se ejemplificará de forma sencilla, como lo abordaste en el curso de Matemáticas 2 y posteriormente se generalizará hasta deducir la fórmula.

Ejemplo 1.
Se desea calcular la longitud del tirante que sostiene a un poste de luz, como se observa en la figura.



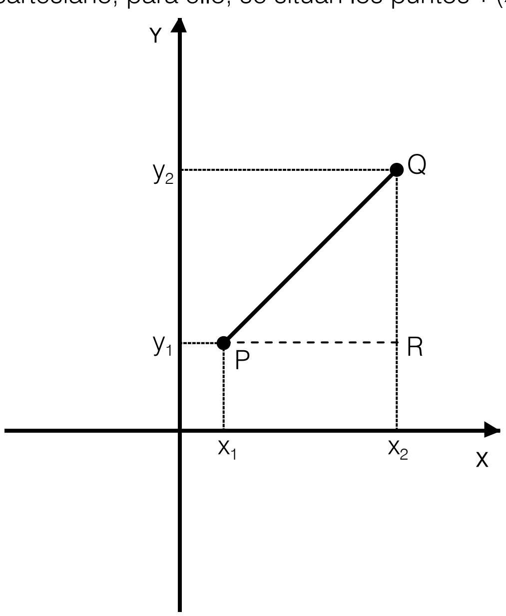
Como se observa en la figura, se forma un triángulo rectángulo, por lo cual se puede aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar la longitud (d) del tirante.

$$\text{hip}^2 = \text{cat}^2 + \text{cat}^2$$

Sustituyendo la información se obtiene:

$$d^2 = (3.52)^2 + (2.45)^2$$
$$d = \sqrt{12.3904 + 6.0025}$$
$$d = \sqrt{18.3929}$$
$$d \approx 4.29$$

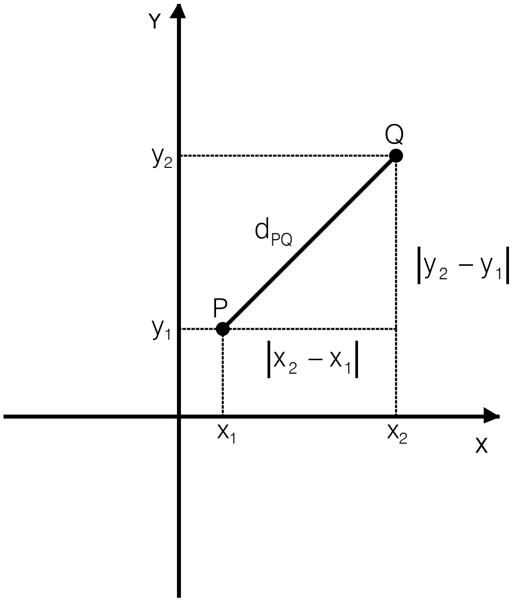
El ejemplo anterior ayuda a visualizar la forma de obtener la distancia entre dos puntos cualquiera en un plano cartesiano, para ello, se sitúan los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, como se muestra en la gráfica.



Se establecen las longitudes de las proyecciones en el eje X y Y del segmento, para ello se utiliza la fórmula de longitud de un segmento en el sistema coordenado lineal.

$$\overline{PR} = |x_2 - x_1| \text{ y } \overline{RQ} = |y_2 - y_1|$$

Ahora se considera el Teorema de Pitágoras en el triángulo que se forma con las proyecciones, como se observa a continuación.



$$hip^2 = cat^2 + cat^2$$

Sustituyendo la longitud de las proyecciones, se tiene:

$$(d_{PQ})^2 = (|x_2 - x_1|)^2 + (|y_2 - y_1|)^2$$

Los valores absolutos son para que las longitudes sean positivas; también cuando se eleve al cuadrado cada término, el resultado será positivo, así que para hacerlo más práctico, se tomarán únicamente los cuadrados, como sigue:

$$(d_{PQ})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

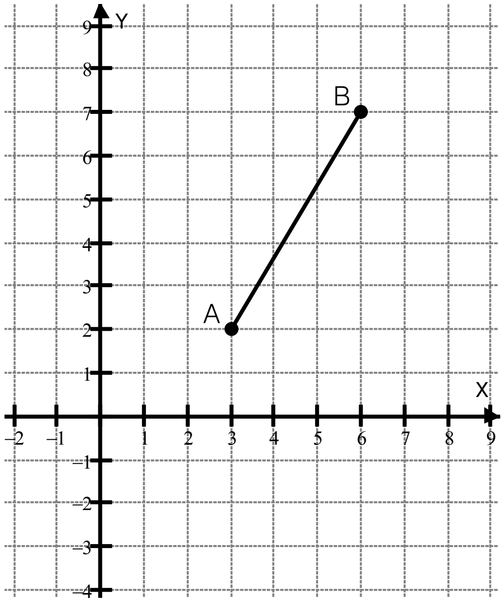
Ahora se despeja la d_{PQ} sacando raíz. Habrá que recordar que hay dos posibles resultados al sacar una raíz, sólo que consideraremos el resultado positivo, dado que la distancia no es negativa.

Así que la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, dadas sus coordenadas, es:

$$\boxed{d_{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Ejemplo 2.
Calcular la longitud del segmento que une a los puntos $A(3,2)$ y $B(6,7)$.

Se podría empezar por realizar el desarrollo algebraico, pero es recomendable graficar primero cualquier problema para visualizar lo que se debe hacer.



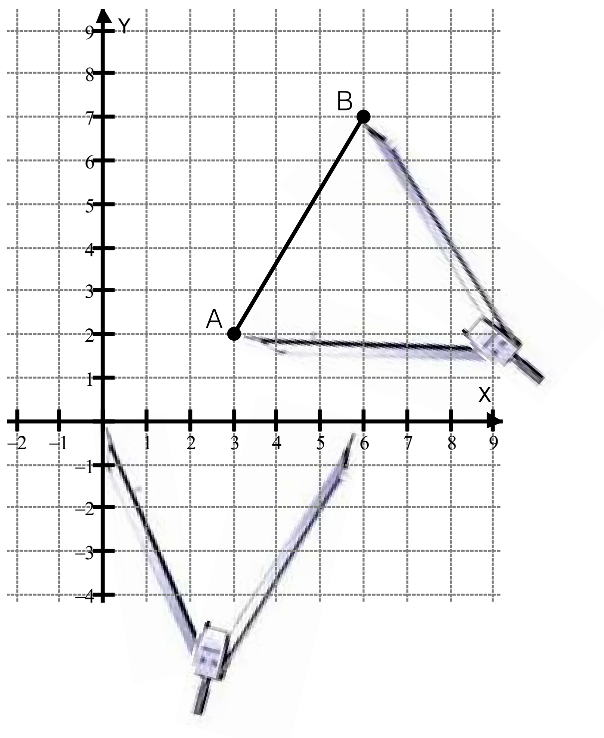
Ahora se asignan las coordenadas.

$$A(3,2) = (x_1, y_1)$$
$$B(6,7) = (x_2, y_2)$$

Y se sustituyen en la fórmula.

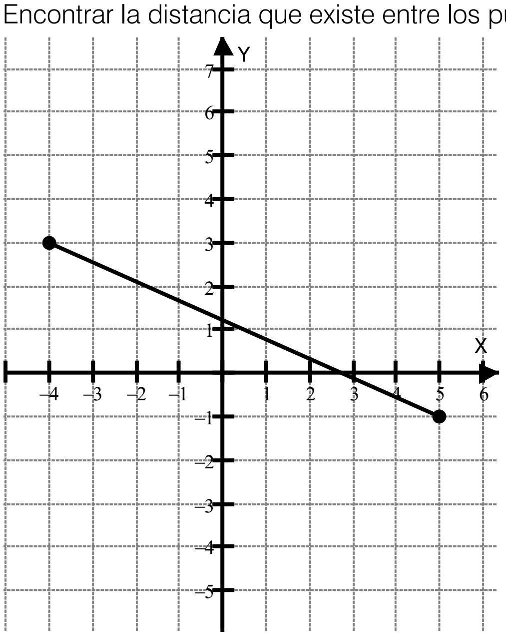
$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{(6-3)^2 + (7-2)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{(3)^2 + (5)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{9 + 25}$$
$$d_{AB} = \sqrt{34}$$
$$d_{AB} \approx 5.83$$

Con un compás puedes comprobar, de forma práctica, el resultado que se obtuvo, abriéndolo aproximadamente 5.83 unidades en el eje horizontal, y transportando la abertura al segmento, ésta debe coincidir con los extremos del segmento AB, como se muestra a continuación.



Ejemplo 3.

Encontrar la distancia que existe entre los puntos $M(-4,3)$ y $N(5,-1)$



La asignación de las coordenadas es:

$M(-4,3) = (x_1, y_1)$

$N(5,-1) = (x_2, y_2)$

Ahora se sustituyen en la fórmula.

$$d_{MN} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{MN} = \sqrt{(5-(-4))^2 + (-1-3)^2}$$

$$d_{MN} = \sqrt{(5+4)^2 + (-1-3)^2}$$

$$d_{MN} = \sqrt{(9)^2 + (-4)^2}$$

$$d_{MN} = \sqrt{81+16}$$

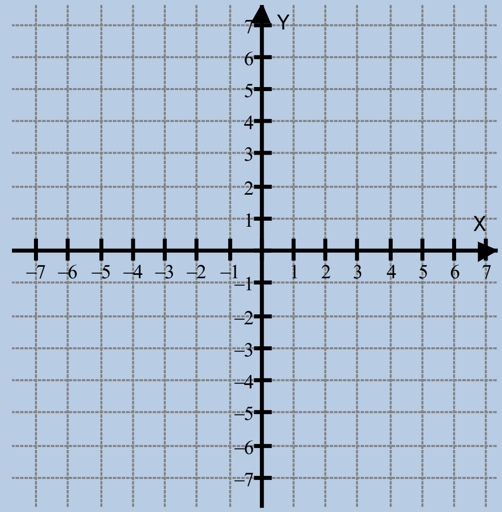
$$d_{MN} = \sqrt{97}$$

$$d_{MN} \approx 9.85$$

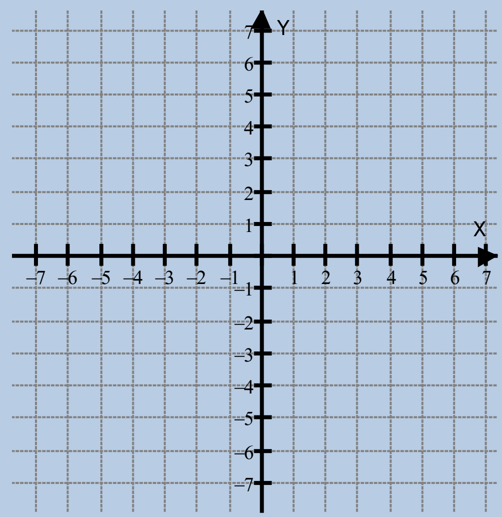
Actividad: 3

Encuentra la distancia entre los puntos y realiza la gráfica del segmento correspondiente.

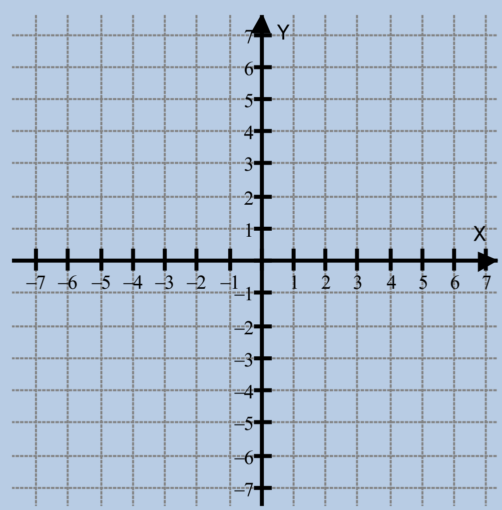
a) $C(2,5)$ y $D(1,3)$



b) $E(-4,4)$ y $F(3,3)$

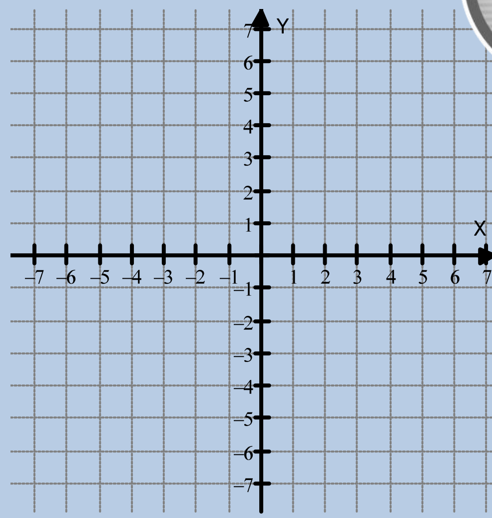


c) $G(0,-3)$ y $H(7,-1)$

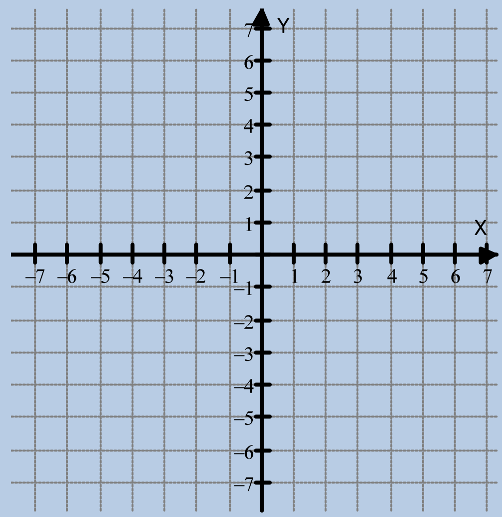


Actividad: 3 (continuación)

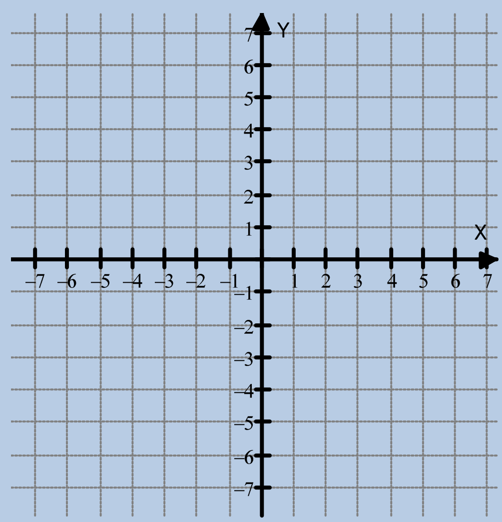
d) J(–8, – 7) y K(–3, – 4)



e) P(5, – 6) y Q(7,7)

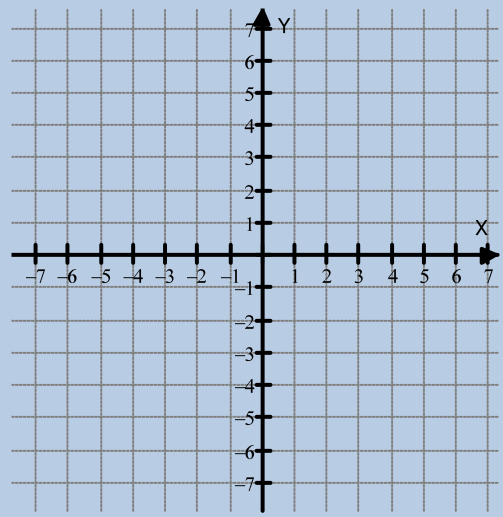


f) U(0,1) y V(5, 0)

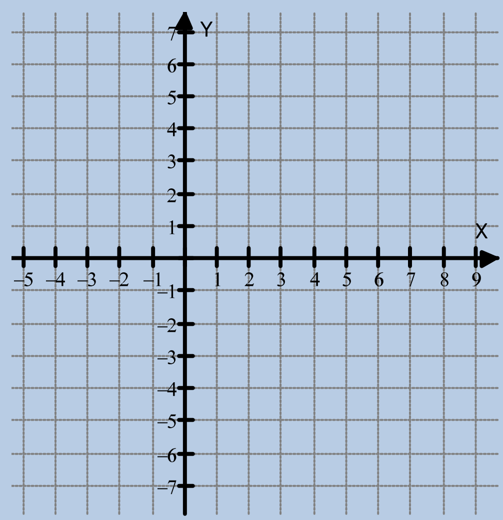


Actividad: 3 (continuación)

g) $S(-\frac{4}{3}, -6)$ y $T(2, \frac{2}{3})$

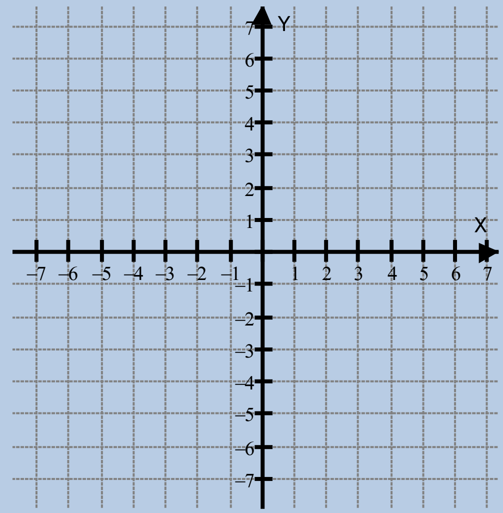


h) $L(9, -2)$ y $M(-4, 3)$

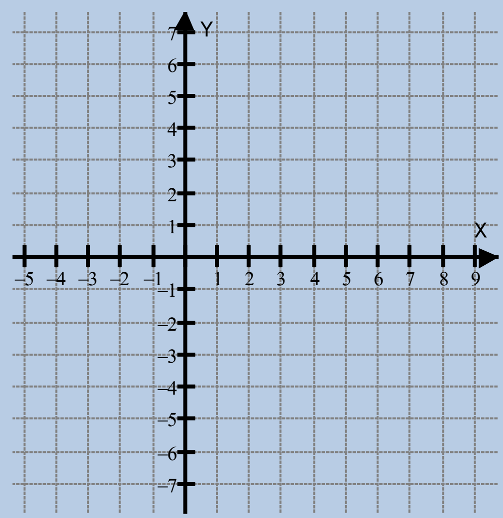


<table>
<tr><th colspan="7">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 3</td><td colspan="4">Producto. Gráficas.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="7">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="4">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica puntos en el plano cartesiano.</td><td colspan="4">Ubica puntos en el plano cartesiano y calcula longitudes de segmentos.</td><td colspan="2">Realiza la actividad mostrando interés en la misma y externa sus dudas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td colspan="2" rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

g) $S(-\frac{4}{3}, -6)$ y $T(2, \frac{2}{3})$



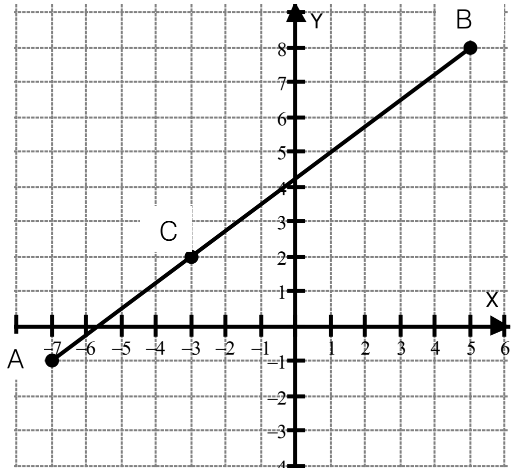
h) $L(9, -2)$ y $M(-4, 3)$



Evaluación						
Actividad: 3	Producto. Gráficas.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Identifica puntos en el plano cartesiano.	Ubica puntos en el plano cartesiano y calcula longitudes de segmentos.			Realiza la actividad mostrando interés en la misma y externa sus dudas.		
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

La fórmula de distancia también se utiliza para realizar demostraciones o encontrar coordenadas faltantes, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.
Demostrar que los puntos $A(-7,-1)$, $B(5,8)$ y $C(-3,2)$, son colineales, es decir, están en la misma línea recta.



Por la gráfica se podría decir que lo son, pero no todo el tiempo lo que parece ser a la vista correcto, lo es, todo depende de la perspectiva. Por lo que se debe demostrar algebraicamente que los puntos efectivamente estén sobre la misma línea recta; para ello, se tendría que demostrar la siguiente hipótesis:

$$d_{AB} = d_{AC} + d_{CB}$$

La longitud del segmento AB

$A(-7,-1) = (x_1, y_1)$
$B(5, 8) = (x_2, y_2)$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{(5-(-7))^2 + (8-(-1))^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{(5+7)^2 + (8+1)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{(12)^2 + (9)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{144+81}$$
$$d_{AB} = \sqrt{225}$$
$$d_{AB} = 15$$

La longitud del segmento AC

$A(-7,-1) = (x_1, y_1)$
$C(-3, 2) = (x_2, y_2)$

$$d_{AC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d_{AC} = \sqrt{(-3-(-7))^2 + (2-(-1))^2}$$
$$d_{AC} = \sqrt{(-3+7)^2 + (2+1)^2}$$
$$d_{AC} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$$
$$d_{AC} = \sqrt{16+9}$$
$$d_{AC} = \sqrt{25}$$
$$d_{AC} = 5$$

La longitud del segmento BC

$B(5, 8) = (x_1, y_1)$
$C(-3, 2) = (x_2, y_2)$

$$d_{BC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d_{BC} = \sqrt{(-3-5)^2 + (2-8)^2}$$
$$d_{BC} = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2}$$
$$d_{BC} = \sqrt{64+36}$$
$$d_{BC} = \sqrt{100}$$
$$d_{BC} = 10$$

Una vez encontradas las longitudes de los segmentos se sustituyen en la hipótesis.

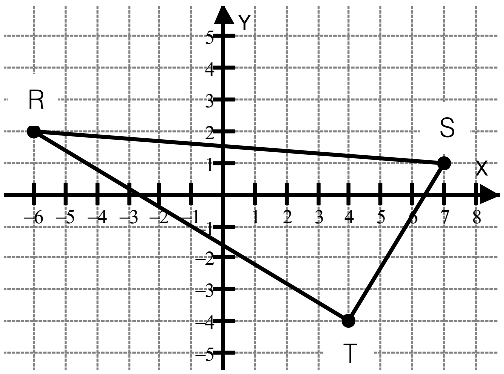
$$d_{AB} = d_{AC} + d_{CB}$$
$$15 = 5 + 10$$
$$15 = 15$$

Por lo tanto, queda demostrado que a través de procedimientos algebraicos y no solamente visual, los puntos son colineales.

Ejemplo 5.

Demostrar que los puntos $R(-6,2)$, $S(7,1)$ y $T(4,-4)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

Para demostrar lo anterior, los lados del triángulo deben satisfacer el Teorema de Pitágoras, por lo que se requiere primero graficar para identificar qué segmento es la posible hipotenusa y cuáles los probables catetos.



La posible hipotenusa debe ser el segmento de mayor longitud, así que puede ser el segmento RS, y los catetos los segmentos RT y TS.

La hipótesis a comprobar es:

$$(d_{RS})^2 = (d_{RT})^2 + (d_{TS})^2$$

Ahora hay que obtener las longitudes de cada uno de los segmentos.

La longitud del segmento RS

$$R(-6,2) = (x_1, y_1)$$
$$S(7,1) = (x_2, y_2)$$

$$d_{RS} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d_{RS} = \sqrt{(7-(-6))^2 + (1-2)^2}$$
$$d_{RS} = \sqrt{(7+6)^2 + (1-2)^2}$$
$$d_{RS} = \sqrt{(13)^2 + (-1)^2}$$
$$d_{RS} = \sqrt{169+1}$$
$$d_{RS} = \sqrt{170}$$

La longitud del segmento RT

$$R(-6,2) = (x_1, y_1)$$
$$T(4,-4) = (x_2, y_2)$$

$$d_{RT} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d_{RT} = \sqrt{(4-(-6))^2 + (-4-2)^2}$$
$$d_{RT} = \sqrt{(4+6)^2 + (-4-2)^2}$$
$$d_{RT} = \sqrt{(10)^2 + (-6)^2}$$
$$d_{RT} = \sqrt{100+36}$$
$$d_{RT} = \sqrt{136}$$

La longitud del segmento TS

$$T(4,-4) = (x_1, y_1)$$
$$S(7,1) = (x_2, y_2)$$

$$d_{TS} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d_{TS} = \sqrt{(7-4)^2 + (1-(-4))^2}$$
$$d_{TS} = \sqrt{(7-4)^2 + (1+4)^2}$$
$$d_{TS} = \sqrt{(3)^2 + (5)^2}$$
$$d_{TS} = \sqrt{9+25}$$
$$d_{TS} = \sqrt{34}$$

A continuación se sustituyen las distancias encontradas en la hipótesis para verificar si se cumple el Teorema de Pitágoras.

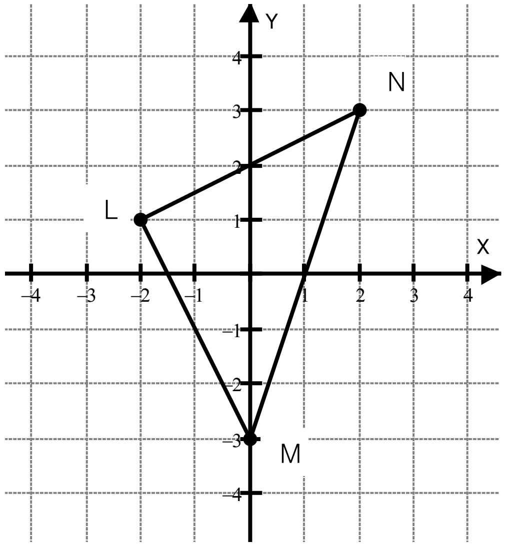
$$(d_{RS})^2 = (d_{RT})^2 + (d_{TS})^2$$
$$(\sqrt{170})^2 = (\sqrt{136})^2 + (\sqrt{34})^2$$
$$170 = 136 + 34$$
$$170 = 170$$

Por lo tanto el triángulo RST es rectángulo.

Ahora se abordarán otros tipos de problemas en los que también se utiliza la fórmula de distancia.

Ejemplo 6.

Determina si los puntos $L(-2,1)$, $M(0,-3)$ y $N(2,3)$ son vértices de un triángulo equilátero, isósceles o escaleno.



Para ello se requiere encontrar la longitud de sus lados para ver si:

1) Tiene 3 lados de igual medida, entonces es un triángulo equilátero.
2) Dos de sus lados tienen igual medida, entonces es un triángulo isósceles.
3) Tiene sus 3 lados de diferente medida, entonces será un triángulo escaleno.

Ahora se calcula la longitud de sus lados; primero se requiere asignar las coordenadas para poder sustituir la fórmula, como se observa a continuación:

La longitud del segmento RS

$L(-2,1)=(x_1,y_1)$

$M(0,-3)=(x_2,y_2)$

$$d_{LM}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d_{LM}=\sqrt{(0-(-2))^2+(-3-1)^2}$$
$$d_{LM}=\sqrt{(2)^2+(-4)^2}$$
$$d_{LM}=\sqrt{4+16}$$
$$d_{LM}=\sqrt{20}$$

La longitud del segmento RT

$L(-2,1)=(x_1,y_1)$

$N(2,\ 3)=(x_2,y_2)$

$$d_{LN}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d_{LN}=\sqrt{(2-(-2))^2+(3-1)^2}$$
$$d_{LN}=\sqrt{(2+2)^2+(3-1)^2}$$
$$d_{LN}=\sqrt{(4)^2+(2)^2}$$
$$d_{LN}=\sqrt{16+4}$$
$$d_{LN}=\sqrt{20}$$

La longitud del segmento TS

$N(2,\ 3)=(x_1,y_1)$

$M(0,-3)=(x_2,y_2)$

$$d_{MN}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d_{MN}=\sqrt{(0-2)^2+(-3-3)^2}$$
$$d_{MN}=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}$$
$$d_{MN}=\sqrt{4+36}$$
$$d_{MN}=\sqrt{40}$$

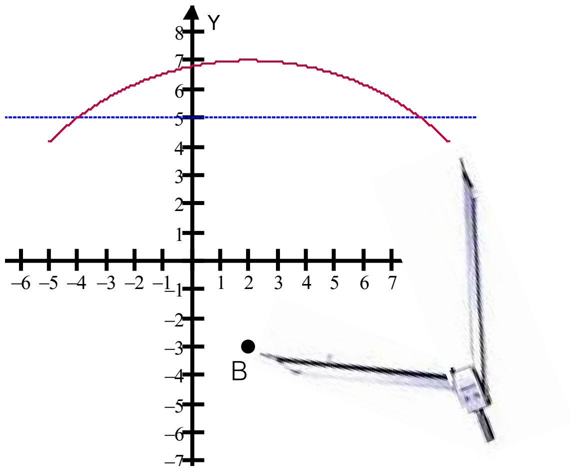
Los resultados obtenidos, establecen que es un triángulo isósceles, ya que el lado MN tiene la misma longitud que el lado LN.

Ejemplo 7.

Si la distancia entre el punto $A(x, 5)$ y $B(2, -3)$, es de 10 unidades, obtener el valor de la coordenada faltante.

En este caso, la falta de la coordenada impide realizar la gráfica completa, para ello se tendría que graficar sólo los datos que se poseen, para tener una idea de lo que se pide realizar.

Para localizar dónde puede estar el punto A, se podría tomar un compás y abrirlo 10 unidades, apoyarlo en el punto B y visualizar dónde podría estar el punto A.



En el dibujo la línea punteada son todos los puntos que tienen como ordenada 5, así que el punto A debe estar sobre la línea, y es el punto exacto donde se interseca la línea con el compás. También se nota en el dibujo que pueden ser dos posibles puntos los que cumplan con el requisito.

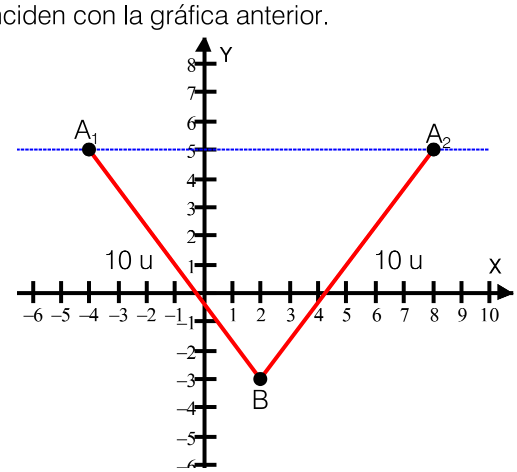
Ahora se realizarán los cálculos para encontrar las coordenadas, primero, basándose en la fórmula y en los datos se tiene:

$A(x, 5) = (x_1, y_1)$
$B(2, -3) = (x_2, y_2)$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$10 = \sqrt{(2 - x)^2 + (-3 - 5)^2}$$
$$(10)^2 = \left(\sqrt{(2 - x)^2 + (-8)^2}\right)^2$$
$$100 = (2 - x)^2 + 64$$
$$100 - 64 = (2 - x)^2$$
$$36 = (2 - x)^2$$
$$\pm\sqrt{36} = 2 - x$$
$$\pm 6 = 2 - x$$
$$x = 2 \mp 6$$

Los resultados son: $x_1 = 2 - 6 = -4$ y $x_1 = 2 + 6 = 8$

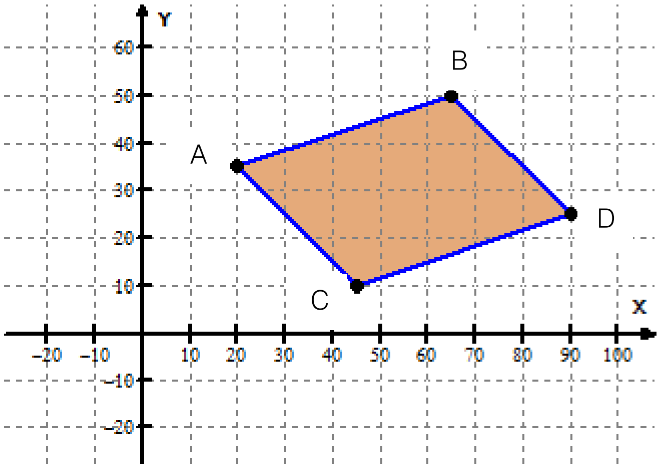
Así que las coordenadas del punto que está a 10 unidades de distancia de $B(2, -3)$, y que tiene ordenada 5 es: $A_1(-4, 5)$ y $A_2(8, 5)$, los cuales coinciden con la gráfica anterior.



Las aplicaciones de la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos son muy variadas. De antemano se diría que para qué utilizar la fórmula si se puede medir los objetos con instrumentos precisos, como cintas de métricas, flexómetro, teodolitos, entre otros. La respuesta a esta interrogante es que existen situaciones en las que no es posible llevar a cabo la medición entre dos puntos y se requiere recurrir a la ubicación de las coordenadas y el cálculo de la distancia con la fórmula, como por ejemplo cuando se desea medir la longitud del fémur, del diámetro del cráneo u otras medidas que se les realizan a los fetos en el vientre de sus madres, mediante los ultrasonidos, en este estudio los radiólogos establecen los extremos de la parte del cuerpo que desean medir y la máquina, aplicando la fórmula, calcula la longitud.

Ejemplo 8.

Daniel tiene un terreno en forma de cuadrilátero y desea saber cuánto miden las diagonales del mismo. Si se coloca el terreno en un sistema de coordenadas, los vértices corresponden a $A(20,35)$, $B(65,50)$, $C(45,10)$ y $D(90,25)$ medidas en metros.



La longitud de la diagonal AD

$A(20,35)=(x_1,y_1)$
$D(95,\ 25)=(x_2,y_2)$

$d_{AD}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
$d_{AD}=\sqrt{(95-20)^2+(25-35)^2}$
$d_{AD}=\sqrt{(75)^2+(-10)^2}$
$d_{AD}=\sqrt{5625+100}$
$d_{AD}=\sqrt{5725}$
$d_{AD}\approx 75.66$

La longitud del segmento BC

$B(65,50)=(x_1,y_1)$
$C(45,\ 10)=(x_2,y_2)$

$d_{BC}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
$d_{BC}=\sqrt{(45-65)^2+(10-50)^2}$
$d_{BC}=\sqrt{(-25)^2+(-40)^2}$
$d_{BC}=\sqrt{625+1600}$
$d_{BC}=\sqrt{2225}$
$d_{BC}\approx 47.17$

Las diagonales son de 75.66 m y 47.17 m.

■ Cierre

Actividad: 4

Encuentra lo que se pide en cada uno de los siguientes planteamientos y realiza la gráfica correspondiente.

1. Si dos vértices de un triángulo equilátero son los puntos $A(-3,0)$ y $T(3,\ 0)$. Cuáles son las coordenadas del tercer vértice del triángulo.

2. Calcula el perímetro del triángulo formado por los puntos $R(-5,7)$, $S(1,8)$ y $T(6,-3)$.

3. La distancia entre los puntos $A(1,4)$ y $B(-3,y)$ es de $\sqrt{52}$. Calcula la coordenada faltante.

Actividad: 4 (continuación)

4. Determina el tipo de triángulo (equilátero, isósceles, escaleno) que forman los puntos $P(-5,3)$, $Q(6,6)$ y $C(-3,1)$

5. La base de un triángulo isósceles es el segmento que une los puntos $(-1,-3)$ y $(3,1)$, si la abscisa del tercer vértice es -4. Encuentra la ordenada.

6. Yunuen y Sofía, después de hablar por el celular, deciden encontrarse en la escuela la cual en un plano cartesiano se ubica en $E(-2,7)$. Yunuen vive en $A(5,3)$ y sigue el camino ACE siendo $C(2,0)$. Sofía vive en $B(-7,-2)$ y el camino que sigue es BE. Si salen al mismo tiempo y con la misma velocidad.
   1. ¿Quién llegará primero?
   2. Si Yunuen hubiera seguido el camino AE, ¿Qué distancia habría recorrido?

Actividad: 4 (continuación)

7. La siguiente tabla corresponde al desplazamiento que hizo Eduardo en su automóvil.

t(h)	0.5	2.5	3
d(Km)	22.5	225	270

Si el tiempo y el desplazamiento corresponden a la primera y segunda coordenada de puntos en el plano cartesiano, determina mediante la fórmula de distancia si Eduardo llevaba velocidad constante, es decir, si dichos puntos son colineales.

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 4</td><td colspan="3">Producto: Problemas de aplicación.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Reconoce las coordenadas de puntos proporcionados en una situación cotidiana.</td><td colspan="3">Aplica el concepto de distancia en problemas de la vida cotidiana.</td><td colspan="2">Aprecia la aplicabilidad de la fórmula de la distancia entre puntos del plano cartesiano.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Secuencia didáctica 2.
División de un segmento rectilíneo.

Inicio

Actividad: 1

En equipo, analicen la información y contesten lo que se pide.

Letty, Sandra, Carmen, Nilsa y Alma participarán en una competencia de relevos en el orden dado, la salida está ubicada en el punto S(1,2) y la meta en el punto M(16,12), cada una de ellas debe de correr la misma distancia en una pista recta; elabora la gráfica de los puntos en los que se deben ubicar cada una de las corredoras para el cambio de estafeta.

a) ¿Cuánto mide la distancia que recorre cada una de ellas?

b) ¿Qué razón le corresponde a la ubicación de cada una de las corredoras con respecto a la distancia que falta para llegar a la meta?

<table>
<tr><th colspan="7">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 1</td><td colspan="4">Producto: Problemas de aplicación.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><td colspan="7">Saberes</td></tr>
<tr><td>Conceptual</td><td colspan="4">Procedimental</td><td colspan="2">Actitudinal</td></tr>
<tr><td>Reconoce la razón a la que se encuentran puntos en un segmento.</td><td colspan="4">Establece la razón a la que se encuentran puntos en un segmento.</td><td colspan="2">Propone maneras creativas de solución a los problemas de aplicación.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td colspan="2">NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Desarrollo

Noción de razón en la división de un segmento rectilíneo.

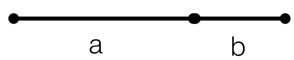
En matemáticas 1 y 2 se abordaron los temas de razón y proporción, de los cuales se retomarán definiciones para encontrar puntos de división de un segmento. Como recordarás, *razón* es la comparación por división de dos cantidades semejantes, por lo general es mediante el cociente de las mismas.

Ejemplo 1.
Diego puede leer 350 palabras por minuto y un lector promedio lee 250 palabras por minuto. ¿Cuánto más rápido lee Diego? Para poder encontrar la relación, se divide:

$$\frac{350}{250}=\frac{7}{5}$$

Esto es, por cada 7 palabras que lee Diego, un lector promedio lee 5.

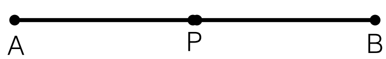
De la misma forma si se tiene un segmento que es dividido en dos partes, la razón se calcula de la manera siguiente:



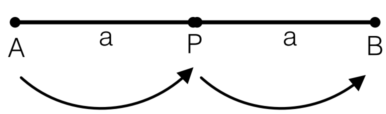
$$r=\frac{a}{b}$$

A continuación se realizará un análisis de diferentes razones en el eje coordenado horizontal y posteriormente se generalizará al plano cartesiano.

Ejemplo 2.
El punto P divide el segmento $\overrightarrow{AB}$ en dos partes iguales, encontrar la razón a la cual el punto biseca al segmento.



Independientemente de lo que mida cada tramo, son iguales, y la razón se establece:



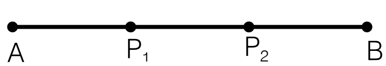
$$r=\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$

$$r=\frac{a}{a}$$

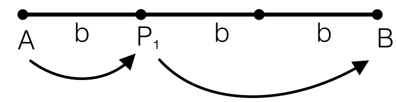
$$r=1$$

El punto de división es el punto medio y los segmentos están a razón de 1.

Ejemplo 3.
Se divide el segmento $\overrightarrow{AB}$ en tres partes iguales, encontrar las razones en las cuales se divide al segmento por cada punto de trisección.

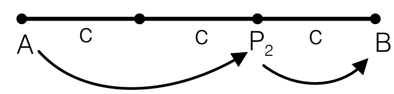


Primero se obtiene la razón a la cual punto P_1 divide al segmento $\overrightarrow{AB}$, denominándola r_1.



$$r_1 = \frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}$$
$$r_1 = \frac{b}{2b}$$
$$r_1 = \frac{1}{2}$$

Ahora se obtiene la razón para el punto P_2, la cual se denomina r_2.



$$r_2 = \frac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}}$$
$$r_2 = \frac{2c}{c}$$
$$r_2 = 2$$

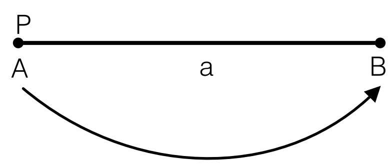
Por lo tanto, el primer punto de trisección P_1 está a razón de $\frac{1}{2}$, y el punto P_2 está a razón de 2.

Así sucesivamente se pueden ir calculando puntos que dividan en varias partes a un segmento; ahora se abordarán las razones de puntos que coincidan con los extremos del segmento, o que estén fuera de él, tanto a la derecha como a la izquierda, como se ejemplifica a continuación:

Ejemplo 4.

Encontrar la razón a la que se encuentra un punto que coincide con el extremo izquierdo del segmento $\overrightarrow{AB}$.

Como se observa en la figura, la distancia entre el punto P y punto A es cero, debido a que se encuentran ubicados en misma posición.



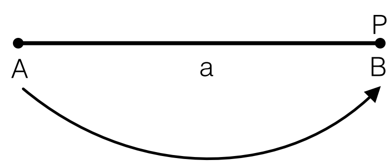
$$r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$
$$r = \frac{0}{a}$$
$$r = 0$$

Cuando el punto P coincide con el extremo izquierdo del segmento $\overrightarrow{AB}$, éste divide al segmento en una razón $r=0$.

Ejemplo 5.

Encontrar la razón a la que se encuentra un punto que coincide con el extremo derecho del segmento $\overrightarrow{AB}$.

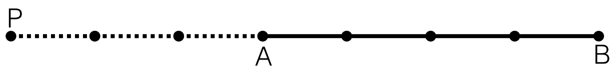
Como se observa en la figura, la distancia entre el punto P y punto B es cero, debido a que se encuentran ubicados en misma posición.



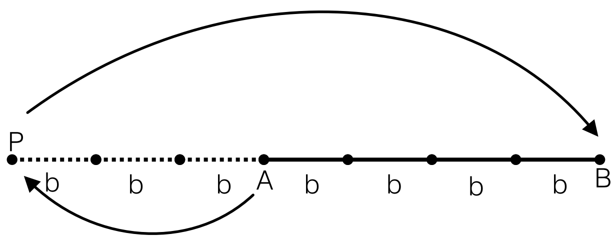
$$r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$
$$r = \frac{a}{0}$$
$$r = \text{no está definido}$$

La razón del punto P que coincide con el extremo derecho no está definida, también se dice que es infinito (∞).

Ejemplo 6.
Se divide un segmento en 4 partes iguales y se desea encontrar la razón del punto que está a la izquierda del extremo izquierdo, como se ve en la figura.



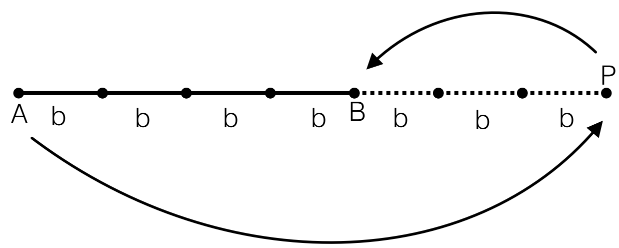
En este caso el segmento AP cambia de dirección y se refleja en el numerador de la razón, como se observa a continuación.



$$r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$
$$r = \frac{-3b}{7b}$$
$$r = -\frac{3}{7}$$

Ejemplo 7.
Se divide un segmento en 4 partes iguales y se desea encontrar la razón del punto que está a la derecha del extremo derecho del segmento $\overrightarrow{AB}$

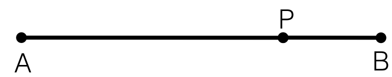
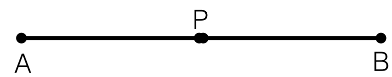
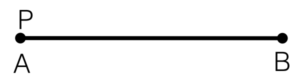
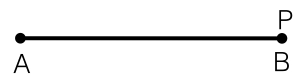
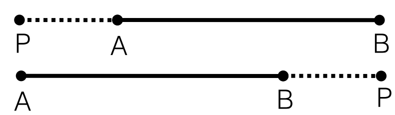
$$r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$
$$r = \frac{7b}{-3b}$$
$$r = -\frac{7}{3}$$



En los dos ejemplos anteriores se obtuvieron razones negativas, sólo que la diferencia entre ellas, comparando los valores absolutos de las fracciones, es decir, sin considerar el signo; es:

1. Cuando el punto está a la izquierda del segmento la fracción es menor que la unidad.
2. Cuando se encuentra ubicado a la derecha del segmento, la fracción es mayor que la unidad.

La información anterior se resume en el siguiente cuadro.

Valor de la razón	Descripción del punto	Figura
$r > 0$	El punto de partición es dentro del segmento.	
$r = 1$	El punto de partición es el punto medio del segmento.	
$r = 0$	El punto de partición coincide con el extremo izquierdo.	
$r =$ no definido	El punto de partición coincide con el extremo derecho.	
$r < 0$	El punto está fuera del segmento.	

Actividad: 2

Encuentra la razón para cada uno de los casos, dibuja el segmento y ubica los puntos de partición.

1. El segmento MN se divide en 4 partes iguales, encuentra la razón de cada uno de los puntos de partición.

2. El segmento RS se divide en 5 partes iguales, encuentra la razón de los puntos más cercanos a cada uno de los extremos.

3. El radio de una circunferencia es el segmento AC, siendo C el centro de la misma, encuentra la razón a la que se encuentra el punto B que corresponde al extremo derecho del diámetro AC.

4. Dos ciudades A y B están separadas entre sí por seis tramos iguales, si un automóvil está alineado entre las dos ciudades y se encuentra a dos tramos de la ciudad de A, encuentra la razón de su ubicación.

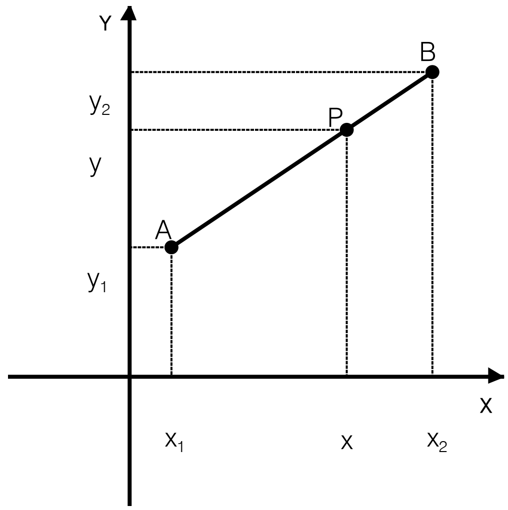
5. Marco, Gerardo y Paco competirán en una carrera, Marco es corredor de alto rendimiento y les dará una ventaja de 10 m a Gerardo, éste a su vez le dará una ventaja de 4 m a Paco, quien es el menos veloz, una vez alineados y ubicados en sus posiciones, encuentra la razón a la que se ubicó Paco.

6. El segmento AB mide 12 unidades. ¿Cuánto tendría que valer el segmento AP para que el punto P dividiera al segmento AB en una razón $r = 1/5$.

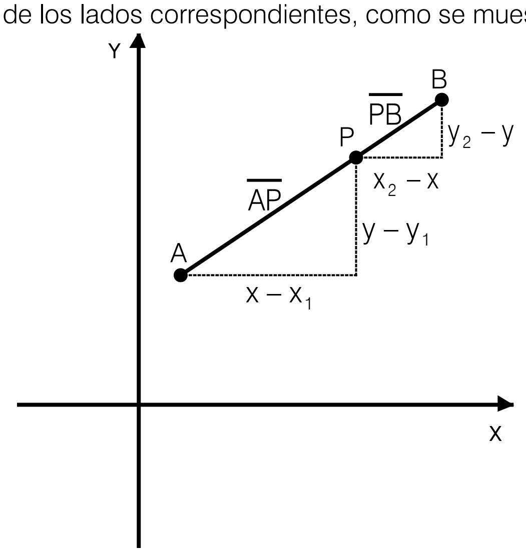
<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 2</td><td colspan="3">Producto: Problemas de aplicación.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica la razón a la que se encuentran puntos que dividen a un segmento rectilíneo.</td><td colspan="3">Calcula la razón del punto de división de un segmento.</td><td colspan="2">Expresa sus dudas y corrige sus errores.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

División de un segmento del plano cartesiano, en una razón dada.

Para dividir un segmento construido en el plano cartesiano, se requiere ubicar un punto que lo divida y trazar las proyecciones de sus coordenadas.



A continuación se observa que se forman dos triángulos semejantes con las proyecciones, ya que los ángulos que forman el segmento con las proyecciones horizontales son iguales, por lo cual, se puede establecer las proporciones de los lados correspondientes, como se muestra a continuación.



$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \qquad \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Cambiando la parte izquierda de cada una de las proporciones anteriores por "r", ya que corresponde a lo que se conoce como razón, se obtiene:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \qquad r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Si se desea encontrar las coordenadas del punto de partición P(x, y), teniendo como datos conocidos los extremos del segmento y la razón a la que se encuentra el punto, se puede deducir la fórmula a partir de las proporciones anteriores, de la siguiente manera:

Se realiza el despeje de las variables "x" y "y" de la proporción correspondiente.

$$\begin{aligned} r &= \frac{x - x_1}{x_2 - x} \\ r(x_2 - x) &= x - x_1 \\ rx_2 - rx &= x - x_1 \\ -x - rx &= -x_1 - rx_2 \quad (-1) \\ x + rx &= x_1 + rx_2 \\ x(1 + r) &= x_1 + rx_2 \\ x &= \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r &= \frac{y - y_1}{y_2 - y} \\ r(y_2 - y) &= y - y_1 \\ ry_2 - ry &= y - y_1 \\ -y - ry &= -y_1 - ry_2 \quad (-1) \\ y + ry &= y_1 + ry_2 \\ y(1 + r) &= y_1 + ry_2 \\ y &= \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \end{aligned}$$

Las fórmulas obtenidas son las coordenadas del punto que divide a un segmento a una razón dada.

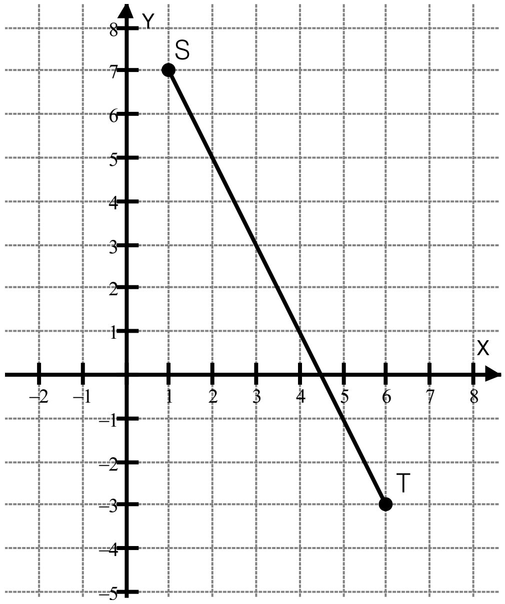
$$\boxed{x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}} \qquad \boxed{y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}}$$

Ejemplo 1.

Obtener las coordenadas del punto P(x, y) que divide al segmento cuyos extremos son $S(1, 7)$ y $T(6, -3)$ a razón de $r = 2/3$.

Primero hay que tomar en cuenta que la razón es positiva, esto indica que el punto de partición está ubicado entre los extremos del segmento.

A continuación se grafican los puntos para visualizar el segmento y asignar las coordenadas de los extremos.



$$S(1, 7) = (x_1, y_1)$$
$$T(6, -3) = (x_2, y_2)$$

Ahora se sustituyen los datos en las fórmulas para encontrar el punto de partición.

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

$$x = \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)(6)}{1 + \frac{2}{3}} \qquad y = \frac{7 + \left(\frac{2}{3}\right)(-3)}{1 + \frac{2}{3}}$$

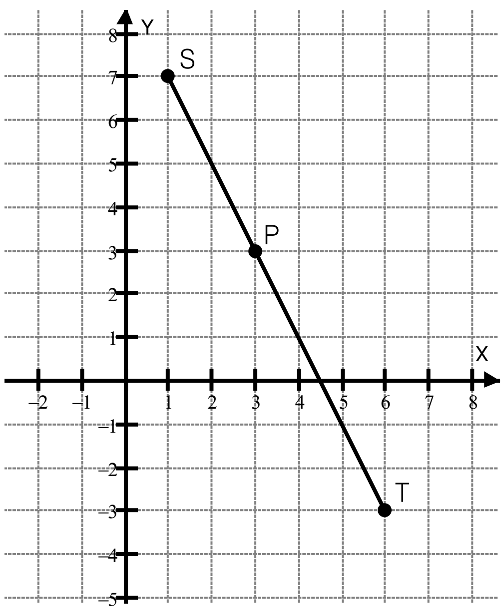
$$x = \frac{1 + 4}{\frac{5}{3}} \qquad y = \frac{7 - 2}{\frac{5}{3}}$$

$$x = \frac{5}{\frac{5}{3}} \qquad y = \frac{5}{\frac{5}{3}}$$

$$x = \frac{15}{5} \qquad y = \frac{15}{5}$$

$$x = 3 \qquad y = 3$$

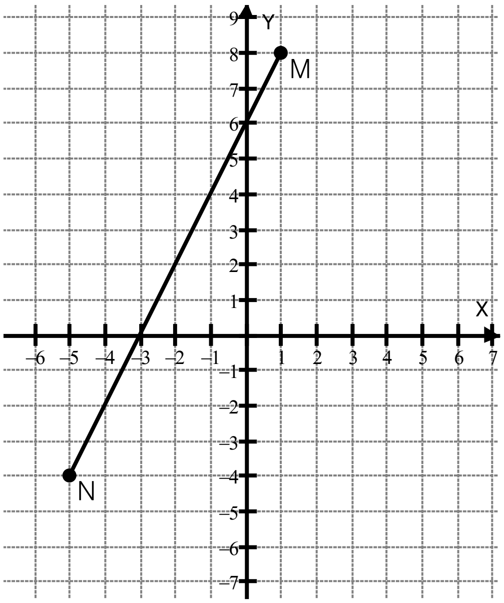
El punto que se busca es el punto $P(3, 3)$ y se ubica en la gráfica para verificar que el proceso fue correcto.



Si se divide de forma imaginaria el segmento en cinco partes iguales, el punto P, se encuentra a 2 partes del extremo S y a 3 partes del extremo T, coincidiendo así con la razón proporcionada.

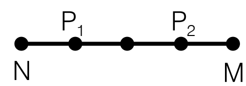
Ejemplo 2.

El segmento formado por los puntos $M(1,8)$ y $N(-5,-4)$ es dividido en 4 partes iguales, obtener los puntos de partición más cercanos a cada uno de los extremos.



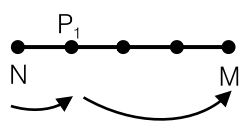
Como son dos puntos los que se desean encontrar, se nombrarán P_1 y P_2.

Se recordará que para sustituir las fórmulas, se requiere conocer las coordenadas de los extremos y la razón a la cual se encuentra el punto de partición, en este caso, la razón está dada de forma verbal, por lo tanto, hay que encontrar el valor numérico de la misma, apoyándose de la proyección horizontal del segmento, como se muestra en la siguiente figura.



La razón a la que se encuentra el punto P_1 es de $r_1 = 1/3$ como se muestra en la figura.

La razón se establece mediante:

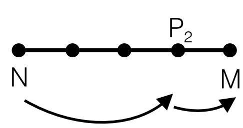


$$r_1 = \frac{\overline{NP_1}}{\overline{P_1M}}$$

$$r_1 = \frac{1}{3}$$

La razón a la que se encuentra el punto P_2 es de $r_2 = 3$ como se muestra en la figura.

La razón se establece mediante:



$$r_2 = \frac{\overline{NP_2}}{\overline{P_2M}}$$

$$r_2 = \frac{3}{1} = 3$$

Una vez encontradas las razones correspondientes a cada punto, se procede a sustituir la fórmula para hallar dichos puntos.

Para el punto P_1:

$$N(-5,-4) = (x_1, y_1)$$
$$M(1,8) = (x_2, y_2)$$
$$r_1 = 1/3$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$$
$$x = \frac{-5 + \left(\frac{1}{3}\right)(1)}{1+\frac{1}{3}}$$
$$x = \frac{-5 + \frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}$$
$$x = \frac{\frac{-14}{3}}{\frac{4}{3}}$$
$$x = \frac{-14}{4}$$
$$x = -\frac{7}{2}$$
$$x = -3.5$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$
$$y = \frac{-4 + \left(\frac{1}{3}\right)(8)}{1+\frac{1}{3}}$$
$$y = \frac{-4 + \frac{8}{3}}{\frac{4}{3}}$$
$$y = \frac{\frac{-4}{3}}{\frac{4}{3}}$$
$$y = -1$$

El punto de partición más cercano al extremo N es $P_1\left(-\frac{7}{2}, -1\right)$

Para el punto P_2:

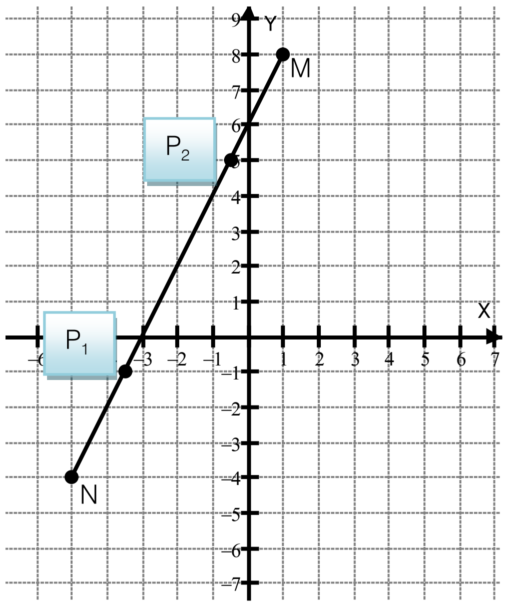
$$N(-5,-4) = (x_1, y_1)$$
$$M(1,8) = (x_2, y_2)$$
$$r_2 = 3$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$$
$$x = \frac{-5 + (3)(1)}{1+3}$$
$$x = \frac{-5+3}{4}$$
$$x = \frac{-2}{4}$$
$$x = -\frac{1}{2}$$
$$x = -0.5$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$
$$y = \frac{-4 + (3)(8)}{1+3}$$
$$y = \frac{-4+24}{4}$$
$$y = \frac{20}{4}$$
$$y = 5$$

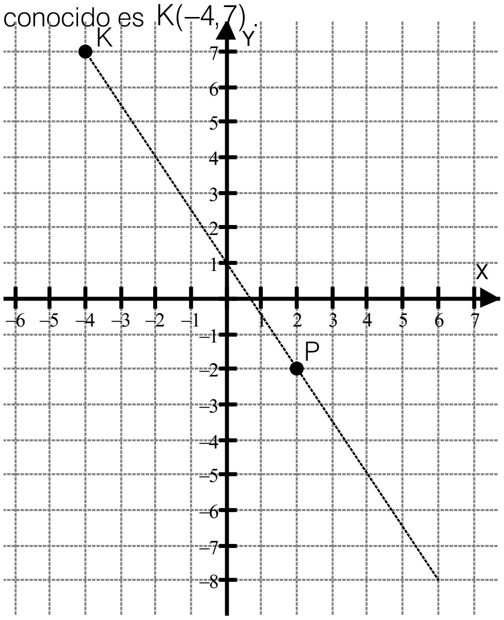
El punto de partición más cercano al extremo M es $P_2\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$

Ahora se grafican ambos puntos para corroborar si es correcto el procedimiento realizado.



Ejemplo 3.

El segmento KL es dividido a razón de $3/2$, el punto de partición es $P(2,-2)$. Encontrar el extremo L si el extremo conocido es $K(-4,7)$.



Primero se grafica para visualizar dónde podría estar el extremo faltante del segmento.

La razón positiva indica que el punto de partición debe estar entre los extremos del segmento, por lo que en la gráfica se ubicaría el extremo L al lado derecho, como indica la línea punteada.

También el hecho de que sea la razón $3/2$ indica que el segmento se divide en 5 partes iguales.

Ahora para encontrar el valor de las coordenadas de L, se sustituye en las fórmulas los datos.

$K(-4,7) = (x_1, y_1)$

$P(2,-2) = (x, y)$

$L(x_2, y_2)$

$r = \frac{3}{2}$

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r} \qquad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

$$2=\frac{-4+\left(\frac{3}{2}\right)(x_2)}{1+\frac{3}{2}} \qquad -2=\frac{7+\left(\frac{3}{2}\right)(y_2)}{1+\frac{3}{2}}$$

$$2=\frac{-4+\left(\frac{3}{2}\right)(x_2)}{\frac{5}{2}} \qquad -2=\frac{7+\left(\frac{3}{2}\right)(y_2)}{\frac{5}{2}}$$

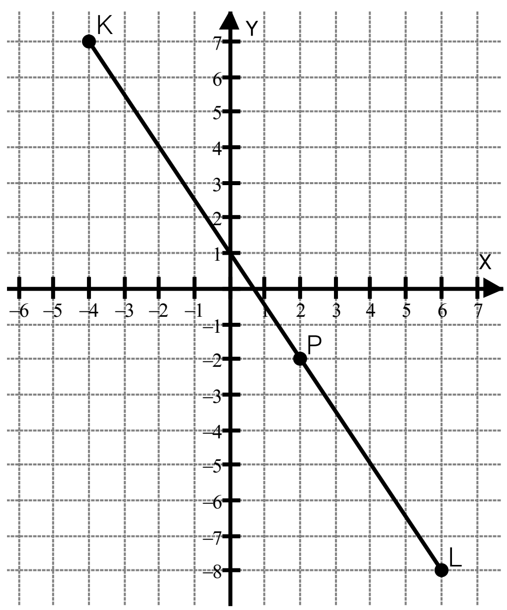
$$2\left(\frac{5}{2}\right)=-4+\left(\frac{3}{2}\right)(x_2) \qquad -2\left(\frac{5}{2}\right)=7+\left(\frac{3}{2}\right)(y_2)$$

$$5+4=\left(\frac{3}{2}\right)(x_2) \qquad -5-7=\left(\frac{3}{2}\right)(y_2)$$

$$\frac{9}{\frac{3}{2}}=x_2 \qquad \frac{-12}{\frac{3}{2}}=y_2$$

$$6=x_2 \qquad -8=y_2$$

La coordenada del extremo del segmento es $L(6,-8)$ y la gráfica queda:



Ejemplo 4.

Encontrar el centro de la circunferencia si uno de sus diámetros es el segmento cuyos extremos son $A(-3,-6)$ y $B(1,\ 4)$.

En el análisis de la razón que se hizo en el tema anterior, se estableció que la razón del punto medio de un segmento es $r=1$.

$A(-3,-6)=(x_1,y_1)$

$B(1,4)=(x_2,y_2)$

$C(x,y)$

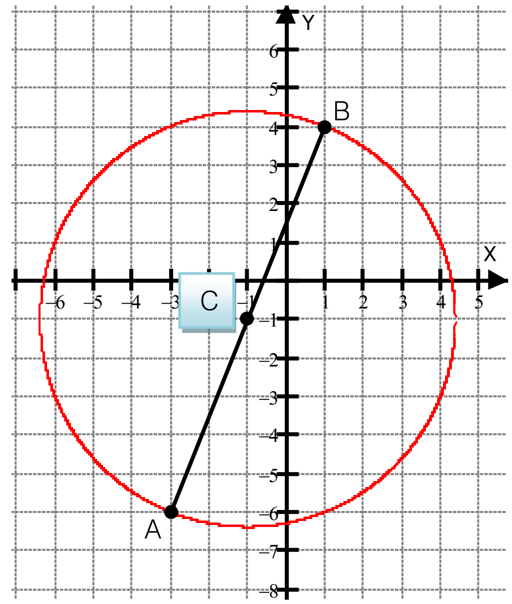
$r=1$

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r} \qquad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

$$x=\frac{-3+(1)(1)}{1+1} \qquad y=\frac{-6+(1)(4)}{1+1}$$

$$x=\frac{-2}{2} \qquad y=\frac{-2}{2}$$

$$x=-1 \qquad y=-1$$



Como se observa en la gráfica, el centro de la circunferencia es $C(-1,-1)$.

Con este ejemplo se pueden particularizar las fórmulas y obtener el punto medio de un segmento, de hecho es una de las fórmulas más usadas, por ejemplo: en la construcción de la mediatriz y mediana se requiere conocer el punto medio de un segmento, así como en la circunferencia es el centro; en la parábola y elipse también hay puntos medios, esto se manejará en los últimos bloques de este módulo.

Las fórmulas sustituyendo $r=1$, cambian de la siguiente forma:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r} \qquad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

$$x=\frac{x_1+(1)x_2}{1+1} \qquad y=\frac{y_1+(1)y_2}{1+1}$$

$$\boxed{x=\frac{x_1+x_2}{2}} \qquad \boxed{y=\frac{y_1+y_2}{2}}$$

El punto medio se expresaría con sus coordenadas como:

$$P_m\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Actividad: 3

Encuentra lo que se indica en cada uno de los problemas y realiza la gráfica correspondiente.

1. Obtén las coordenadas del punto que divida al segmento determinado por los puntos $A(-2,1)$ y $B(3,-4)$.en razón de $r=-\frac{8}{3}$.

2. Obtén las coordenadas del extremo D del diámetro de una circunferencia cuyo centro está ubicado en $C(-4,1)$ y que además tiene como extremo el punto $E(2,6)$.

3. Encontrar la razón r en la que el punto $P(4,2)$ divide al segmento $A(-2,-4)$ y $B(8,6)$.

Actividad: 3 (continuación)

4. Traza el triángulo JKL y dibuja en él la mediana que une al vértice $J(-3,7)$ con el punto medio del segmento dado por los puntos $K(-1,-5)$ y $L(6,1)$.

5. Dibuja el triángulo que se forma al unir los puntos medios de los lados del triángulo cuyos vértices son los puntos A(5, 7), B(1, 3) y C(9, 1).

6. Un arquitecto tiene que diseñar una escalera en un espacio de 4 m de largo por 3 m de altura. La escalera debe tener 5 escalones con la característica de que las medidas de las plantillas sean iguales tanto en ancho y alto. Encuentra los puntos de división de cada escalón. Y la medida que debe tener de alto y ancho cada escalón.

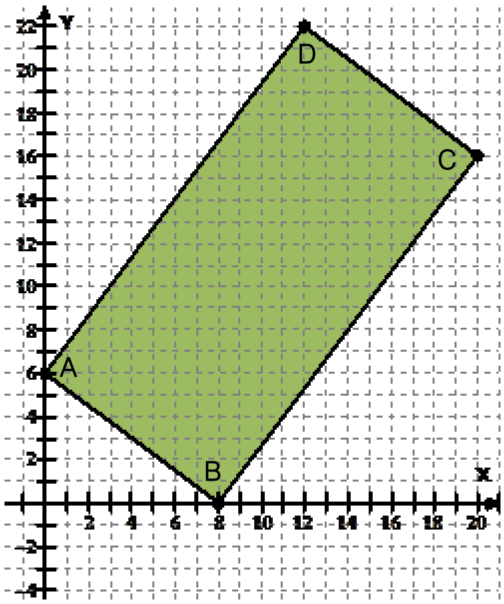
<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 3</td><td colspan="4">Producto: Problemas de aplicación.</td><td>Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="4">Procedimental</th><th>Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica los puntos de partición de segmentos en el plano cartesiano, de problemas cartesianos.</td><td colspan="4">Calcula los puntos de partición de segmentos en el plano cartesiano, de problemas cotidianos.</td><td>Muestra interés al realizar la actividad.
Expresa sus dudas y corrige sus errores.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Áreas y perímetros de polígonos.

A continuación se obtendrán las áreas y perímetros de algunos polígonos, utilizando la fórmula de distancia y la de un punto que divide a un segmento en una razón dada y posteriormente se propondrán algunos procedimientos alternativos para obtener el área de cualquier polígono.

Primero se abordarán ejemplos básicos de triángulos, cuadrados y rectángulos, posteriormente, se retoman el cálculo de áreas y perímetros de polígonos regulares,

Ejemplo 1.
Manuel recibió un terreno rectangular como herencia, y desea cercarlo para evitar que lo invadan otras personas; también debe calcular el área para conocer el precio al cual lo puede vender, sabiendo que el metro cuadrado en esa zona está a $1000.00. El terreno ubicado en el plano cartesiano está definido por los siguientes vértices A(0, 6), B(8, 0), C(20, 16) y D(12, 22), medido en metros.



En este caso el problema ya indica que es un rectángulo, así que tanto el perímetro como el área depende de las medidas de sus lados, entonces, se procede a calcular las longitudes de los lados.

La longitud del lado AB

$$A(0,6) = (x_1, y_1)$$
$$B(8,\ 0) = (x_2, y_2)$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{(8-0)^2 + (0-6)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{(8)^2 + (-6)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{64 + 36}$$
$$d_{AB} = \sqrt{100}$$
$$d_{AB} = 10$$

La longitud del lado BC

$$B(8,0) = (x_1, y_1)$$
$$C(20,\ 16) = (x_2, y_2)$$

$$d_{BC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d_{BC} = \sqrt{(20-8)^2 + (16-0)^2}$$
$$d_{BC} = \sqrt{(12)^2 + (16)^2}$$
$$d_{BC} = \sqrt{144 + 256}$$
$$d_{BC} = \sqrt{400}$$
$$d_{BC} = 20$$

El perímetro se calcula sumando la longitud de sus lados, y si se toma como base el lado AB y como altura el lado BC, entonces el perímetro es:

$$P = 2b + 2h$$
$$P = 2(10) + 2(20)$$
$$P = 60\,\text{m}$$

El área se obtiene utilizando la fórmula:

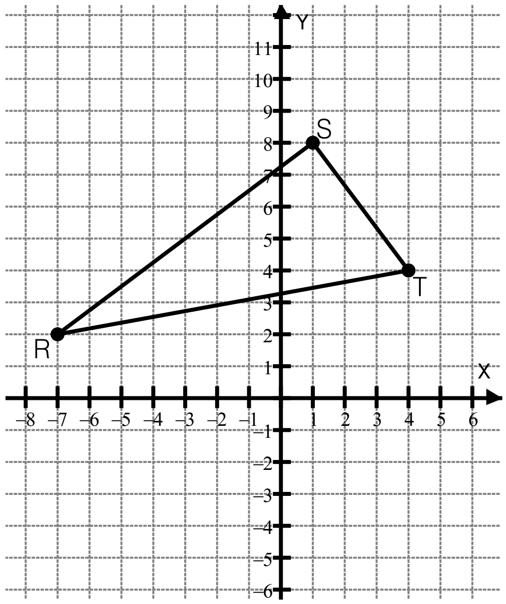
$$A = bh$$
$$A = (10)(20)$$
$$A = 200\,\text{m}^2$$

Así que la cantidad que debe comprar de cerco son 60 metros. El precio al que puede vender el terreno se obtiene de multiplicar el área por el valor del metro cuadrado.

$$\text{Precio de venta} = (200)(1000) = 200000$$

Lo puede vender en $200,000.00

Ejemplo 2.
Encontrar el área y el perímetro del triángulo rectángulo cuyos vértices son los puntos $R(-7,2)$, $S(1,8)$ y $T(4,4)$.



Primero se procede a obtener la longitud de cada uno de los lados.

La longitud del lado RS

$$R(-7,2)=(x_1,y_1)$$
$$S(1,8)=(x_2,y_2)$$

$$d_{RS}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d_{RS}=\sqrt{(1-(-7))^2+(8-2)^2}$$
$$d_{RS}=\sqrt{(1+7)^2+(6)^2}$$
$$d_{RS}=\sqrt{64+36}$$
$$d_{RS}=\sqrt{100}$$
$$d_{RS}=10$$

La longitud del lado ST

$$S(1,8)=(x_1,y_1)$$
$$T(4,4)=(x_2,y_2)$$

$$d_{ST}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d_{ST}=\sqrt{(4-1)^2+(4-8)^2}$$
$$d_{ST}=\sqrt{(3)^2+(-4)^2}$$
$$d_{ST}=\sqrt{9+16}$$
$$d_{ST}=\sqrt{25}$$
$$d_{ST}=5$$

La longitud del lado RT

$$R(-7,2)=(x_1,y_1)$$
$$T(4,4)=(x_2,y_2)$$

$$d_{RT}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d_{RT}=\sqrt{(4-(-7))^2+(4-2)^2}$$
$$d_{RT}=\sqrt{(11)^2+(2)^2}$$
$$d_{RT}=\sqrt{121+4}$$
$$d_{RT}=\sqrt{125}$$
$$d_{RT}\approx 11.18$$

El perímetro es:

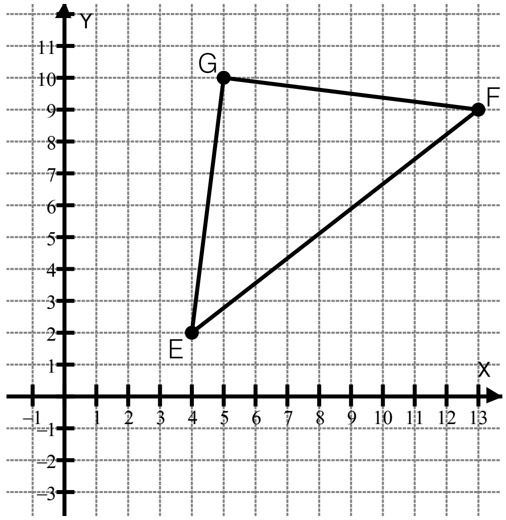
$$P=10+5+\sqrt{125}$$
$$P\approx 26.18\,u$$

La letra "u" indica la unidad; en problemas aplicados puede ser cm, m, Km, plg, pie, etc.

El área se puede obtener directamente con la fórmula $A=\frac{bh}{2}$, la base y la altura tienen la característica de ser perpendiculares, es decir, forman un ángulo de 90º, por ello, los lados RS y ST forman la base y altura del triángulo, así que el área es:

$$A=\frac{bh}{2}$$
$$A=\frac{(10)(5)}{2}=25$$
$$A=25\,u^2$$

Ejemplo 3.
Un carpintero desea construir una ventana en forma de triángulo isósceles, y la información que tiene son los vértices del triángulo cuyas unidades están dadas en decímetros; él desea saber el perímetro y el área, para calcular la longitud de la madera que utilizará y la cantidad de vidrio que debe colocar. Los vértices del triángulo son: $E(4,\ 2)$, $F(13,9)$ y $G(5,10)$.



Obteniendo las longitudes de los lados.

La longitud del lado EG

$$E(4,2) = (x_1, y_1)$$
$$G(5,10) = (x_2, y_2)$$

$$d_{EG} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d_{EG} = \sqrt{(5-4)^2 + (10-2)^2}$$
$$d_{EG} = \sqrt{(1)^2 + (8)^2}$$
$$d_{EG} = \sqrt{1+64}$$
$$d_{EG} = \sqrt{65}$$
$$d_{EG} \approx 8.06$$

La longitud del lado GF

$$G(5,10) = (x_1, y_1)$$
$$F(13,9) = (x_2, y_2)$$

$$d_{GF} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d_{GF} = \sqrt{(13-5)^2 + (9-10)^2}$$
$$d_{GF} = \sqrt{(8)^2 + (-1)^2}$$
$$d_{GF} = \sqrt{64+1}$$
$$d_{GF} = \sqrt{65}$$
$$d_{GF} \approx 8.06$$

La longitud del lado EF

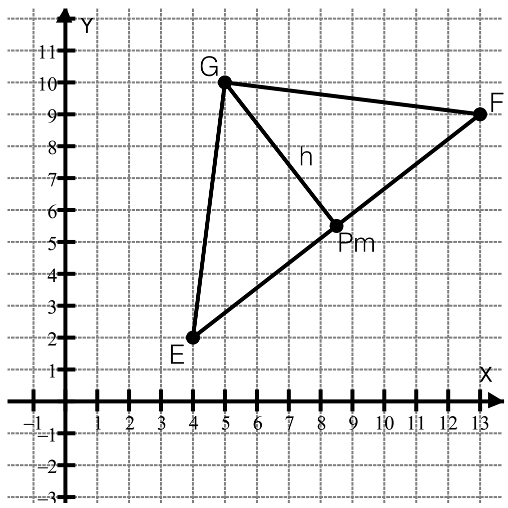
$$E(4,2) = (x_1, y_1)$$
$$F(13,9) = (x_2, y_2)$$

$$d_{EF} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d_{EF} = \sqrt{(13-4)^2 + (9-2)^2}$$
$$d_{EF} = \sqrt{(9)^2 + (7)^2}$$
$$d_{EF} = \sqrt{81+49}$$
$$d_{EF} = \sqrt{130}$$
$$d_{EF} \approx 11.40$$

El perímetro es:

$$P = \sqrt{65} + \sqrt{65} + \sqrt{130}$$
$$P \approx 27.52 \text{ dm}$$

Para calcular el área, se tiene que obtener primero la altura; si se toma como base el lado diferente, la altura cortará por la mitad a la base, por ser un triángulo isósceles, como se observa en la siguiente gráfica.



Ahora se tiene que calcular las coordenadas del punto medio (Pm), para ello, se utilizan las fórmulas:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Se toman los extremos del segmento EF para sustituir las fórmulas.

$E(4,2) = (x_1, y_1)$

$F(13,9) = (x_2, y_2)$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x = \frac{4 + 13}{2} \qquad y = \frac{2 + 9}{2}$$

$$x = \frac{17}{2} \qquad y = \frac{11}{2}$$

Las coordenadas del punto medio son $Pm\left(\frac{17}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

La altura es la longitud del vértice G al punto medio, por ello:

La altura (h) es:

$G(5,10) = (x_1, y_1)$

$Pm\left(\frac{17}{2}, \frac{11}{2}\right) = (x_2, y_2)$

$$h = d_{GPm} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{17}{2} - 5\right)^2 + \left(\frac{11}{2} - 10\right)^2}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(-\frac{9}{2}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{81}{4}}$$

$$h = \sqrt{\frac{130}{4}}$$

$$h = \sqrt{\frac{65}{2}}$$

$$h \approx 5.7$$

El área se puede calcular de la siguiente manera:

$b = d_{EF} = \sqrt{130}$

$h = d_{GPm} = \sqrt{\frac{65}{2}}$

$$A = \frac{bh}{2}$$

$$A = \frac{\left(\sqrt{130}\right)\left(\sqrt{\frac{65}{2}}\right)}{2} =$$

$$A = \frac{65}{2} = 32.5 \text{ dm}^2$$

Todas las figuras anteriores son *polígonos*, los cuales se definen como figuras planas formadas por tres o más segmentos de líneas unidos en sus extremos.

A continuación se abordará una forma más sencilla de calcular el área de un polígono, creada por el francés Pierre Frédéric Sarrus. Esta fórmula se desarrolla mediante determinantes (como los que manejaste en matemáticas 1) y depende del número de vértices que tiene el polígono.

Si los vértices de un polígono son $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, …, $P_n(x_n, y_n)$, la fórmula es:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \dots & \dots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} u^2$$

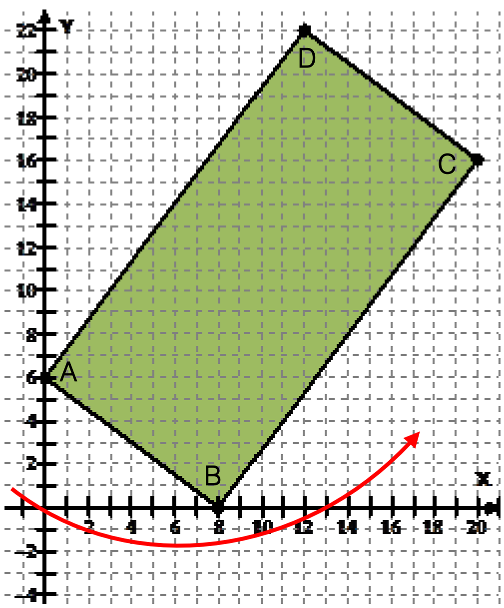
Para utilizar la fórmula, se deben ordenar las coordenadas en sentido positivo, es decir, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

El determinante se desarrolla de la siguiente forma:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \dots & \dots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} u^2 = \frac{1}{2}\left(\left(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + \dots + x_ny_1\right) - \left(x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + \dots + x_1y_n\right)\right)u^2$$

Para comprobar la fórmula se usarán los ejemplos anteriores.

Ejemplo 4.
Calcular el área del terreno que heredó Manuel en el ejemplo 1. Hay que recordar que los vértices del terreno son A(0, 6), B(8, 0), C(20, 16) y D(12, 22), medido en metros.



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} u^2$$

Se puede elegir cualquiera de los puntos como (x_1, y_1), y el siguiente punto tiene que ser el que está a su derecha. En este caso se elegirá como primer punto al vértice A y el acomodo queda de la siguiente forma:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 0 \\ 20 & 16 \\ 12 & 22 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} m^2$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\left((0)(0)+(8)(16)+(20)(22)+(12)(6)\right)-\left((8)(6)+(20)(0)+(12)(16)+(0)(22)\right)\right]m^2$$

$$A = \frac{1}{2}\left[(0+128+440+72)-(48+0+192+0)\right]m^2$$

$$A = \frac{1}{2}\left[(640)-(240)\right]m^2$$

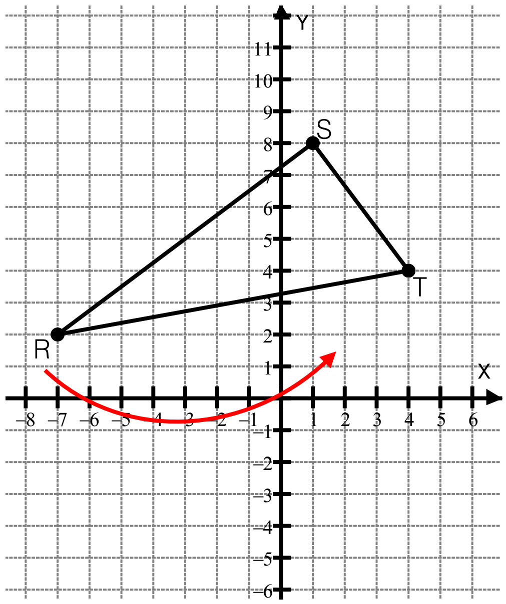
$$A = \frac{1}{2}\left[400\right]m^2$$

$$A = 200\ m^2$$

Coincide con el área obtenida en el ejemplo 1.

Ejemplo 5.

Obtener el área del triángulo rectángulo del ejemplo 2, cuyos vértices son: $R(-7, 2)$, $S(1,8)$ y $T(4, 4)$.



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} u^2$$

Se elige el punto R como primer punto a sustituir, en seguida el punto T, después el punto S y por último se vuelve a repetir el punto R.

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 4 \\ 1 & 8 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} u^2$$

$$A=\frac{1}{2}\left[\left((-7)(4)+(4)(8)+(1)(2)\right)-\left((4)(2)+(1)(4)+(-7)(8)\right)\right]u^2$$

$$A=\frac{1}{2}\left[(-28+32+2)-(8+4-56)\right]u^2$$

$$A=\frac{1}{2}\left[(6)-(-44)\right]u^2$$

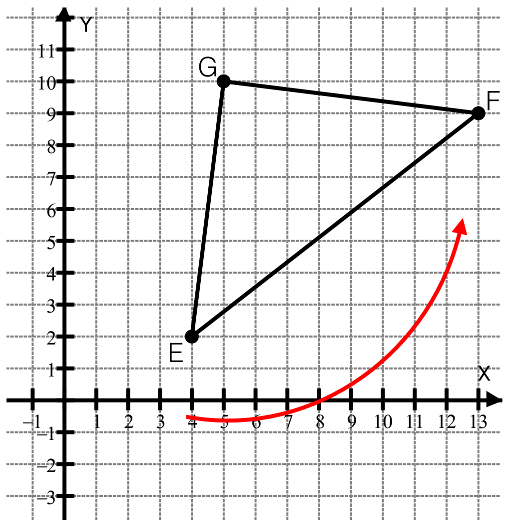
$$A=\frac{1}{2}\left[50\right]u^2$$

$$A=25\ u^2$$

Coincide con el área obtenida en el ejemplo 2.

Ejemplo 6.

Obtener el área de la ventana en forma de triángulo isósceles del ejemplo 3, cuyos vértices son: $E(4,\ 2)$, $F(13,9)$ y $G(5,10)$.



$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}u^2$$

Se elige el punto R como primer punto a sustituir, en seguida el punto T, después el punto S y por último se vuelve a repetir el punto R.

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 2 \\ 13 & 9 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}dm^2$$

$$A=\frac{1}{2}[((5)(2)+(4)(9)+(13)(10))-((4)(10)+(13)(2)+(5)(9))]\ dm^2$$

$$A=\frac{1}{2}[(10+36+130)-(40+26+45)]dm^2$$

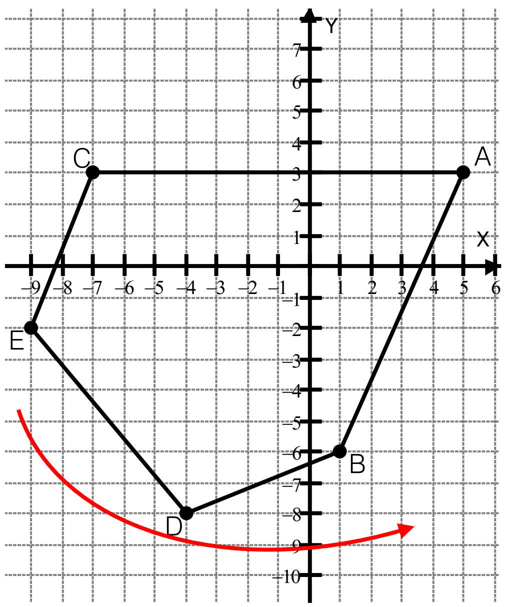
$$A=\frac{1}{2}[(176)-(111)]dm^2$$

$$A=\frac{1}{2}[65]dm^2$$

$$A=32.5\ dm^2$$

Coincide con el área obtenida en el ejemplo 3.

Ejemplo 7.
Encontrar el área del pentágono cuyos vértices son los puntos $A(5,3)$, $B(1,-6)$, $C(-7,3)$, $D(-4,-8)$ y $E(-9,-2)$.



$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}u^2$$

Se elige el punto R como primer punto a sustituir, en seguida el punto T, después el punto S y por último se vuelve a repetir el punto R.

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -9 & -2 \\ -4 & -8 \\ 1 & -6 \\ 5 & 3 \\ -7 & 3 \\ -9 & -2 \end{vmatrix}u^2$$

$$A=\frac{1}{2}[((-9)(-8)+(-4)(-6)+(1)(3)+(5)(3)+(-7)(-2))-((-4)(-2)+(1)(-8)+(5)(-6)+(-7)(3)+(-9)(3))]\ u^2$$

$$A=\frac{1}{2}[(72+24+3+15+14)-(8-8-30-21-27)]u^2$$

$$A=\frac{1}{2}[(128)-(-78)]u^2$$

$$A=\frac{1}{2}[206]u^2$$

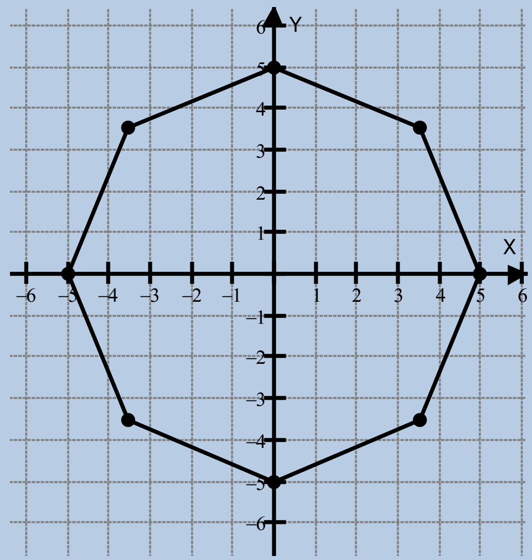
$$A=103\ u^2$$

Actividad: 4

En equipo, resuelvan cada uno de los problemas.

1. El polígono que está en la gráfica es un octágono regular, encuentra:

a) Las coordenadas de cada uno de sus vértices.



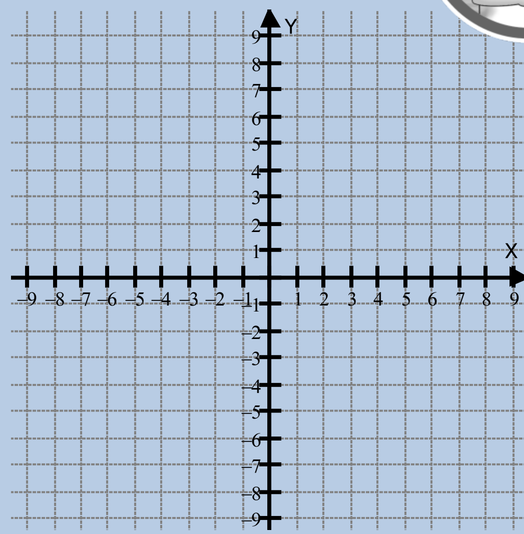
b) El perímetro.

c) El área.

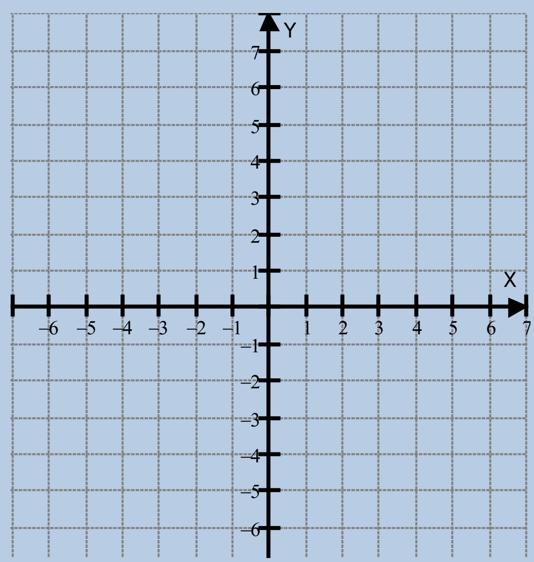
Actividad: 4 (continuación)

2. Obtén las áreas y perímetros de los polígonos, si sus vértices son los puntos:

a) $A(-8,-2)$, $B(-4,-6)$ y $C(-1,5)$.

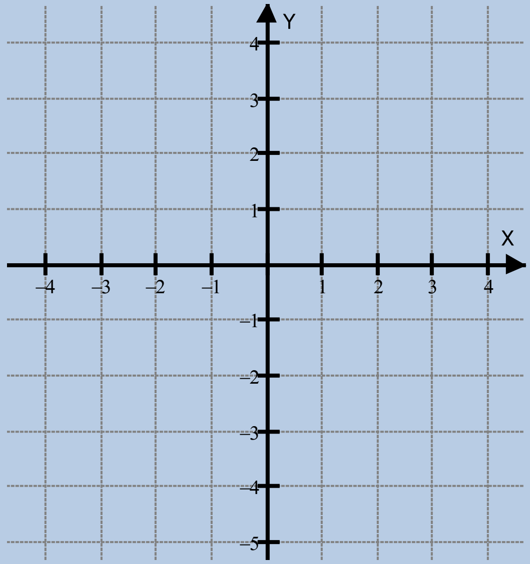


b) $J(-7,-4)$, $K(-1,1)$, $L(-5,7)$, $M(3,4)$ y $N(5,-3)$.



Actividad: 4 (continuación)

c) $P\left(-3, \frac{5}{2}\right)$, $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $R\left(-\frac{7}{2}, -5\right)$ y $S(0,4)$.



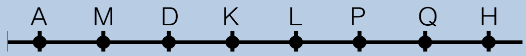
Evaluación					
Actividad: 4	Producto: Gráficas.			Puntaje:	
Saberes					
Conceptual	Procedimental			Actitudinal	
Reconoce el área y perímetro de polígonos.	Determina el área y perímetro de polígonos.			Aprecia la utilidad de las fórmulas para calcular el área y perímetro de polígonos.	
Coevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente	

Cierre

Actividad: 5

Resuelve los siguientes problemas.

1. Utiliza los siguientes puntos para determinar en qué razón divide el punto dado a los segmentos dirigidos que se indican. Observa el ejemplo del inciso a).



a) $\overrightarrow{AP}$; $r_K = \dfrac{\overline{AK}}{\overline{KP}} = \dfrac{3}{2}$

b) $\overrightarrow{DH}$; $r_L =$

c) $\overrightarrow{AK}$; $r_H =$

d) $\overrightarrow{QM}$; $r_D =$

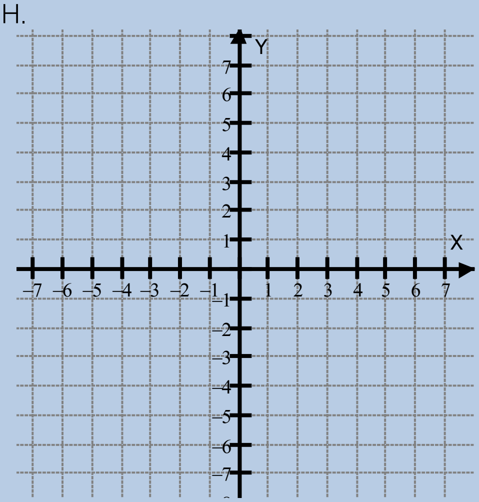
e) $\overrightarrow{HA}$; $r_D =$

f) $\overrightarrow{DQ}$; $r_L =$

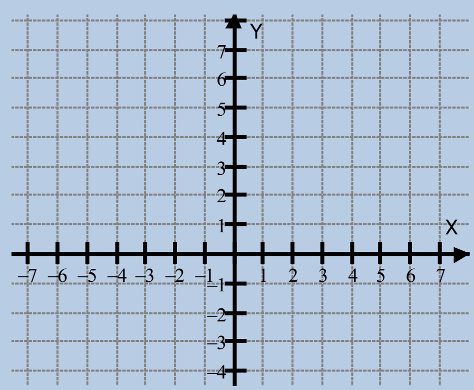
g) $\overrightarrow{PQ}$; $r_A =$

h) $\overrightarrow{LA}$; $r_L =$

2. El punto H(x, y) es el quinto de los puntos que dividen al segmento $\overrightarrow{AB}$ cuyas coordenadas son A(–6, 2) y B(2, –1), se divide 8 partes iguales, hallar las coordenadas de H.



3. El punto M(–3, 5) divide al segmento $\overrightarrow{AB}$ en la razón $r = -\dfrac{3}{7}$, hallar las coordenadas de A, si B(4, –2)



Actividad: 5 (continuación)

4. Fermín tiene un terreno que desea vender en 8 partes triangulares iguales, el terreno tiene forma rectangular y sus vértices son los puntos A(–3, –3), B(3, 3), C(11, –5) y D(5, –11).

a) ¿Cómo se te ocurre que Fermín Podría dividirlo?

b) Tony su sobrino, estudiante de bachillerato, le dice que una de las maneras de lograrlo es uniendo los puntos medios de los lados opuestos y trazando a continuación las diagonales del rectángulo. Traza el rectángulo y comprueba que es correcto el consejo de Tony.

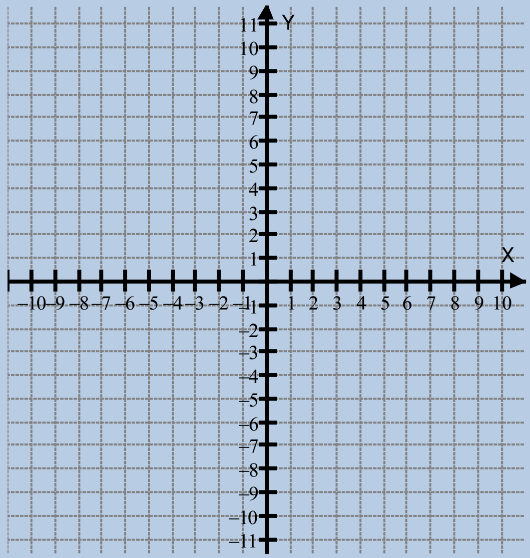
c) Calcula el perímetro de cada una de las partes.

d) ¿Cuál es el área de cada una de las partes?

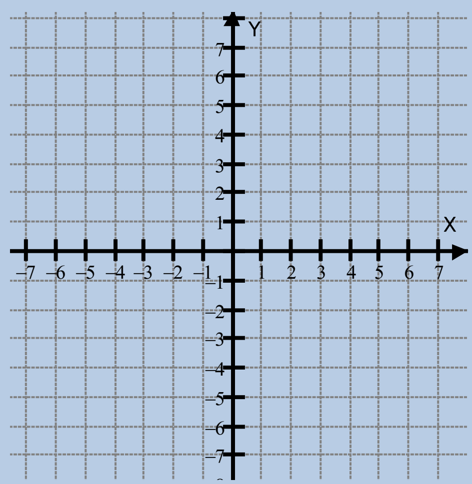
e) Calcula el área total del terreno.

Actividad: 5 (continuación)

5. Carmen debe sembrar 6 arbolitos en un surco. Los árboles deben estar separados por distancias iguales. Si uno de los extremos del surco es el punto R(–5, 2) y el otro extremo es S(10, –5), ¿cuáles son las coordenadas de los puntos donde deben colocarse los 6 árboles desde R hasta S?



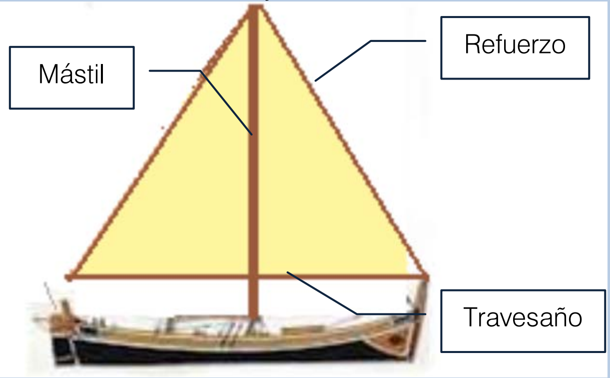
6. ¿Para qué valores de la ordenada tendrá el siguiente triángulo de vértices A(–5, 5), B(4, 2) y C(2, y), un área de 25 unidades cuadradas?



Actividad: 5 (continuación)

7. Juan quiere fabricar la vela para su bote y lo diseña sobre un plano cartesiano con las siguientes coordenadas A(–2, 1), B(4, 1) y C(1, 6), calcula:

a) La cantidad de madera necesaria para la estructura del mástil y el travesaño.



b) La longitud del refuerzo de los contornos de la vela sin considerar los amarres.

c) La cantidad de tela.

Evaluación					
Actividad: 5	Producto: Problemas de aplicación.			Puntaje:	
Saberes					
Conceptual	Procedimental			Actitudinal	
Identifica los elementos para calcular puntos de división, áreas y perímetros en problemas de la vida cotidiana.	Aplica las fórmulas para encontrar puntos de división, áreas y perímetros de problemas de la vida cotidiana.			Aprecia el uso de fórmulas para resolver problemas de aplicación.	
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente	

BLOQUE 3

Integra los elementos de una recta como lugar geométrico.

Competencias disciplinares básicas:

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Unidad de competencia:

- Construye e interpreta modelos sobre la línea recta como lugar geométrico al resolver problemas derivados de situaciones reales, hipotéticas o teóricas.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Atributos a desarrollar en el bloque:

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
8.1 Propone maneras de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
8.3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Tiempo asignado: 10 horas

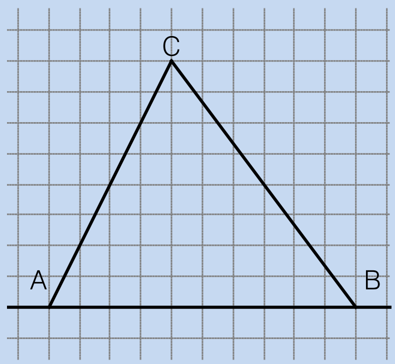
Secuencia didáctica 1.
Inclinación de la recta.
Inicio

Actividad: 1

Contesta las siguientes preguntas.

1. Eduardo y Javier son los capitanes de dos equipos de alpinistas, cada equipo se coloca en lados opuestos de una montaña, el equipo de Eduardo inicia en el punto A y el equipo de Javier lo hace en el punto B, como se muestra en la figura (medida en Km). Si ambos escalan a la misma velocidad y empiezan al mismo tiempo:

a) ¿Qué equipo llegará a la cima primero y por qué?



b) ¿Qué altura tiene la montaña?

c) ¿Qué distancia recorre cada uno de ellos?

d) Obtén la razón de su recorrido vertical con respecto al horizontal, en ambos equipos.

e) Encuentra el ángulo de elevación de cada uno de los lados de la montaña.

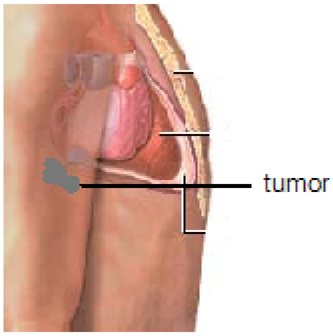
<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 1</td><td colspan="4">Producto: Cuestionario.</td><td>Puntaje:</td></tr>
<tr><td colspan="6">Saberes</td></tr>
<tr><td>Conceptual</td><td colspan="4">Procedimental</td><td>Actitudinal</td></tr>
<tr><td>Identifica el ángulo de elevación de un problema cotidiano.</td><td colspan="4">Calcula el ángulo de elevación de un problema cotidiano.</td><td>Muestra disposición para realizar la actividad.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2" colspan="2">Calificación otorgada por el docente</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

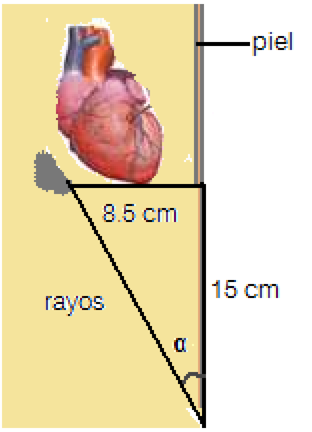
Desarrollo

En la asignatura anterior obtuviste los ángulos agudos de triángulos rectángulos, mediante las funciones trigonométricas; esto se muestra en el siguiente ejemplo y servirá para recordar los conocimientos previos.

Un paciente está recibiendo radioterapia para el tratamiento de un tumor situado atrás del corazón. Para evitar daños en el corazón, el radiólogo debe dirigir los rayos con cierto ángulo hacia el tumor. Si el tumor está localizado a 8.5 cm debajo de la piel y los rayos penetran en el cuerpo a 15 cm hacia abajo de éste, como se observa en la figura, calcular el ángulo con el que los rayos deben penetrar al cuerpo para atacar directamente al tumor.

Visualizando el triángulo que describen los rayos, se tiene:





Los lados conocidos del triángulo descrito en el pecho son los catetos, y se relacionan mediante la función tangente.

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\tan\alpha = \frac{8.5}{15}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{8.5}{15}\right)$$

$$\alpha = 29.54^{\circ}$$

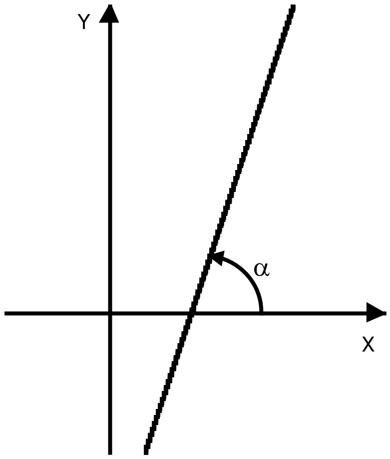
El radiólogo debe dirigir los rayos con un ángulo de 29.54º, para no afectar el corazón.

Los temas que se abordan en este bloque están íntimamente ligados con el *ángulo de inclinación* y con *las razones trigonométricas*, las cuales son comparaciones entre los lados del triángulo rectángulo; no hay que olvidar que la comparación por división de cantidades de la misma especie es la definición de razón.

A continuación se formalizarán estos conceptos considerando lo que hasta ahora se ha abordado de la Geometría Analítica.

Ángulo de inclinación y pendiente de la recta.

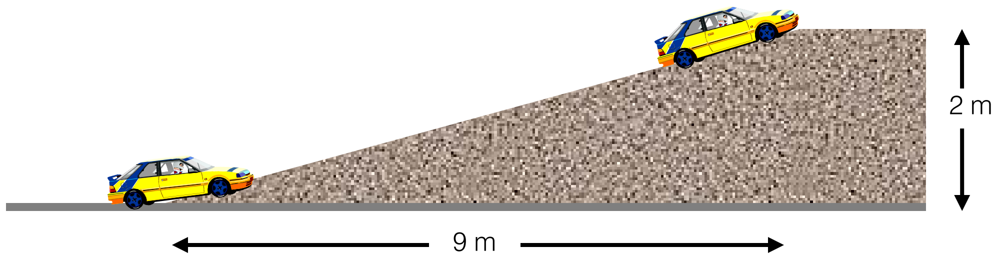
Con la experiencia que se tiene hasta ahora en la gráfica de rectas, se puede visualizar el *ángulo de inclinación* de las mismas, el cual se define como el ángulo (α) que se forma a partir del eje de las abscisas y la recta, en sentido contrario a las manecillas del reloj.



El ángulo de inclinación varía entre 0º y 180º.

La *pendiente* (m) de una recta es la razón entre el desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal, también se le conoce como la razón de cambio en la posición de un punto en el plano cartesiano; para visualizar y comprender mejor esta definición se tomará el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.
Un automóvil se mueve por una carretera inclinada, como se ve en la figura, ¿cuál es la pendiente y el ángulo de inclinación de la carretera?



Como la pendiente es la razón entre los desplazamientos, ésta se expresa de la siguiente forma:

$$m = \frac{2}{9}$$

Esta razón es lo que entre las funciones trigonométricas se conoce como la *tangente* del ángulo de inclinación, por lo tanto, se puede expresar como:

$$\tan\alpha = \frac{2}{9}$$

Para encontrar el ángulo, se utiliza la función inversa.

$$\tan\alpha = \frac{2}{9}$$

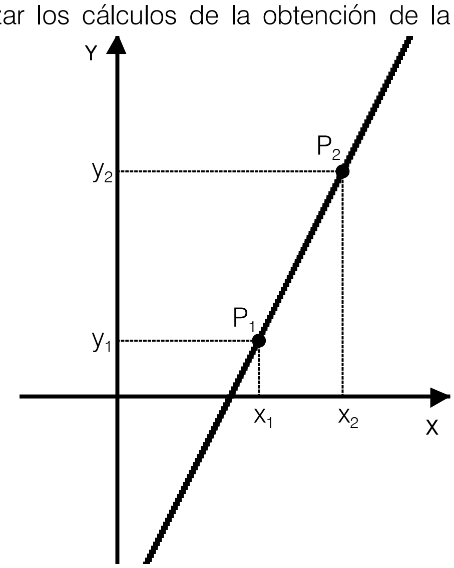
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$$

$$\alpha \approx 12.53^\circ = 12^\circ 31' 48''$$

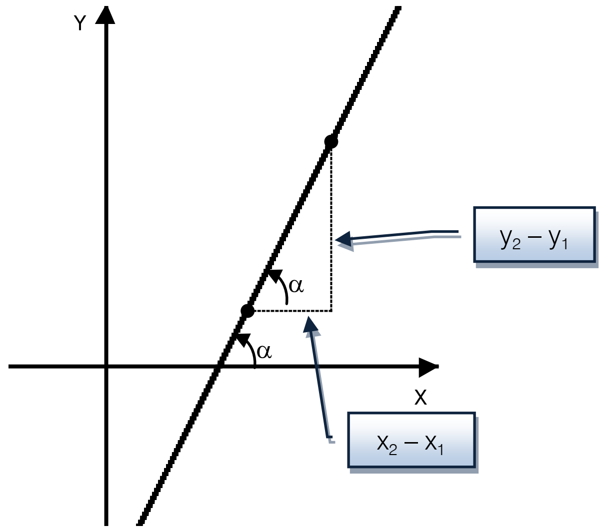
Entonces, con este ejemplo se puede expresar la pendiente de una recta como la tangente del ángulo de inclinación.

$$\boxed{m = \tan\alpha}$$

Ahora, si se tienen las coordenadas de los puntos que determinan el desplazamiento, en lugar de su longitud, se puede obtener la fórmula para realizar los cálculos de la obtención de la pendiente, dados los puntos, como se muestra a continuación.



Se toman las longitudes de las proyecciones del segmento P_1P_2, como se muestra en la figura y se obtiene la pendiente.



$$m = \tan\alpha$$

$$m = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

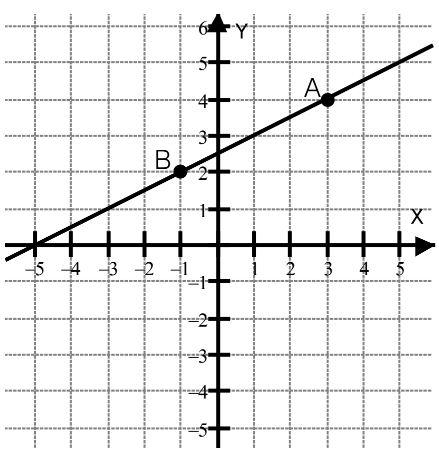
La fórmula anterior es válida para $x_2 \neq x_1$, ya que de lo contrario, el denominador sería cero y se indefiniría el cociente.

La fórmula anterior se utiliza para encontrar la pendiente de una recta, dadas las coordenadas de dos puntos por los que pasa la recta.

Ejemplo 2.

Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $A(3,4)$ y $B(-1,\ 2)$.

Al ubicar los puntos en el plano cartesiano, se tiene la gráfica:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Independientemente del orden en que elijas los puntos, la pendiente es la misma.

A continuación se resolverá el ejemplo cambiando la asignación de las coordenadas, para que verifiques que el resultado es el mismo.

$$A(3,4) = (x_1, y_1)$$
$$B(-1,\ 2) = (x_2, y_2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{2-4}{-1-3}$$
$$m = \frac{-2}{-4}$$
$$m = \frac{1}{2}$$

$$B(-1,\ 2) = (x_1, y_1)$$
$$A(3,4) = (x_2, y_2)$$

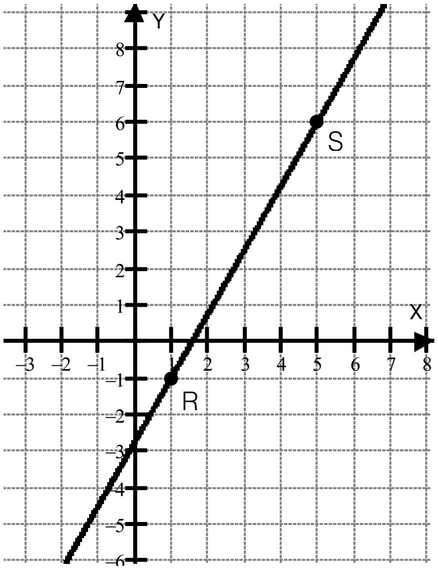
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{4-2}{3+1}$$
$$m = \frac{2}{4}$$
$$m = \frac{1}{2}$$

Ahora se obtiene el ángulo de inclinación de la recta.

$$\alpha = \tan^{-1} m$$
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\alpha \approx 26.56^\circ = 26^\circ 33' 36''$$

Ejemplo 3.

Encontrar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $R(1,-1)$ y $S(5,\ 6)$.



$R(1,-1)=(x_1,y_1)$

$B(5,6)=(x_2,y_2)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m=\frac{6+1}{5-1}$$

$$m=\frac{7}{4}$$

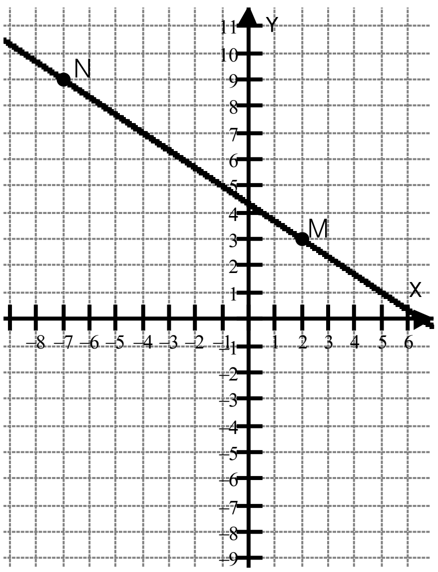
$$\alpha=\tan^{-1} m$$

$$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$$

$$\alpha\approx 60.26^{\circ}=60^{\circ}15'36''$$

Ejemplo 4.

Calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $M(2,3)$ y $N(-7,\ 9)$.



$M(2,3)=(x_1,y_1)$

$N(-7,9)=(x_2,y_2)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m=\frac{9-3}{-7-2}$$

$$m=\frac{6}{-9}=-\frac{2}{3}$$

¿Cómo podrías observar esta fracción en la gráfica?

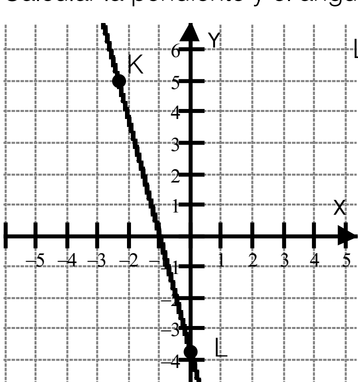
$$\alpha=\tan^{-1} m$$

$$\alpha=\tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\alpha\approx -33.69^{\circ}+180^{\circ}=146.31^{\circ}=146^{\circ}18'36''$$

Ejemplo 5.

Calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $L\left(0,-\frac{15}{4}\right)$ y $K\left(-\frac{7}{3},\ 5\right)$.



$L\left(0,-\frac{15}{4}\right)=(x_1,y_1)$

$K\left(-\frac{7}{3},5\right)=(x_2,y_2)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m=\frac{5+\frac{15}{4}}{-\frac{7}{3}-0}$$

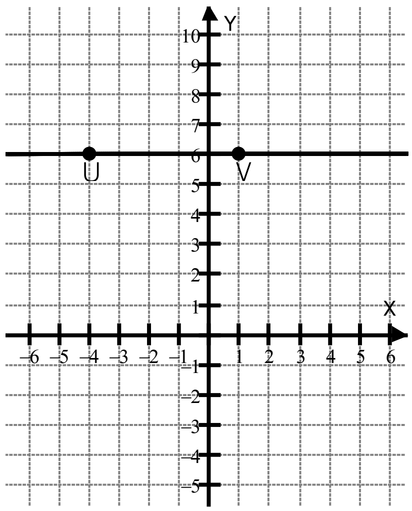
$$m=\frac{\frac{35}{4}}{-\frac{7}{3}}=-\frac{105}{28}=-\frac{15}{4}$$

$$\alpha=\tan^{-1} m$$

$$\alpha=\tan^{-1}\left(-\frac{15}{4}\right)$$

$$\alpha\approx -75.07^{\circ}+180^{\circ}=104.93^{\circ}=104^{\circ}55'48''$$

Ejemplo 6.
Calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $U(-4,6)$ y $V(1,6)$.

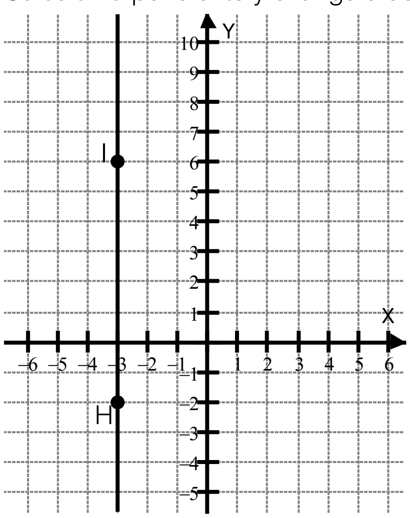


$U(-4,6)=(x_1,y_1)$
$V(1,6)=(x_2,y_2)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$m=\frac{6-6}{1+4}$$
$$m=\frac{0}{5}=0$$

$$\alpha=\tan^{-1} m$$
$$\alpha=\tan^{-1}(0)$$
$$\alpha=0^{\circ}$$

Ejemplo 7.
Calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $H(-3,-2)$ y $I(-3,6)$.



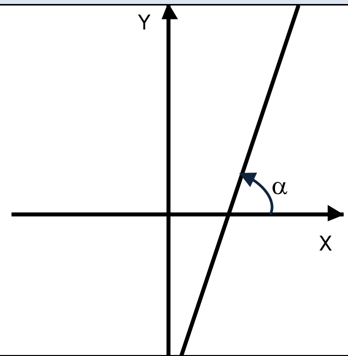
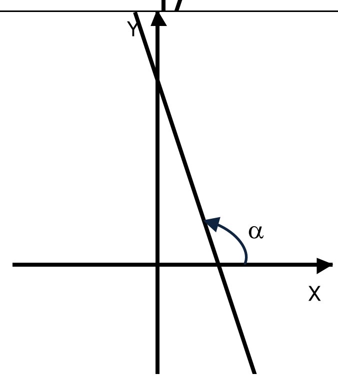
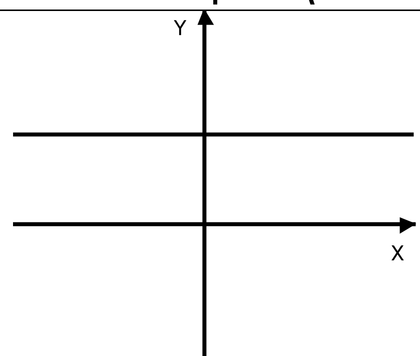
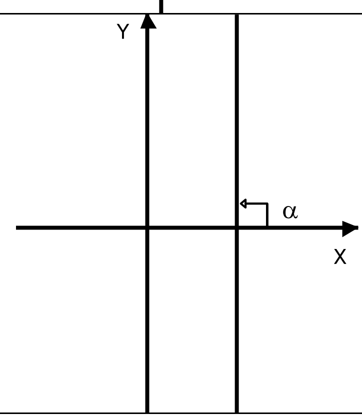
$H(-3,-2)=(x_1,y_1)$
$I(-3,6)=(x_2,y_2)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$m=\frac{6+2}{-3+3}$$
$$m=\frac{8}{0}=\text{no está definido}$$

El ángulo no se puede calcular con la inversa de la tangente, puesto que la pendiente no está definida, pero la gráfica indica que el ángulo de inclinación es de 90º.

¿Qué sucede cuando verificas en tu calculadora la tan 90º?

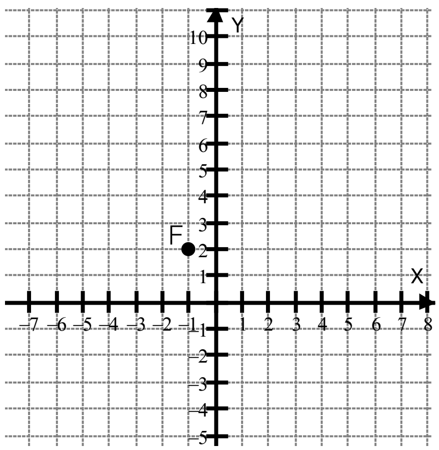
Con los ejemplos anteriores se puede hacer un análisis del comportamiento de la pendiente de una recta y se concluye en el siguiente cuadro.

Ángulo de inclinación	Pendiente	Gráfica
Si el ángulo de inclinación está entre 0º y 90º. $\left(0^\circ < \alpha < 90^\circ\right)$	La pendiente es positiva. $(m > 0)$	
Si el ángulo de inclinación está entre 90º y 180º. $\left(90^\circ < \alpha < 180^\circ\right)$	La pendiente es negativa. $(m < 0)$	
Si el ángulo de inclinación es de 0º ó 180º. $\left(\alpha = 0^\circ \text{ ó } \alpha = 180^\circ\right)$	La pendiente es cero. $(m = 0)$	
Si el ángulo de inclinación es de 90º $\left(\alpha = 90^\circ\right)$	La pendiente no está definida.	

Ejemplo 8.

Encontrar 5 puntos que sean colineales con el punto $F(-1, 2)$ y cuya pendiente es $m=\frac{2}{3}$.

Hay que recordar que colineales significa que los puntos están sobre la misma línea recta, para ello, primero se grafica el punto F que será el punto de partida para encontrar los demás.



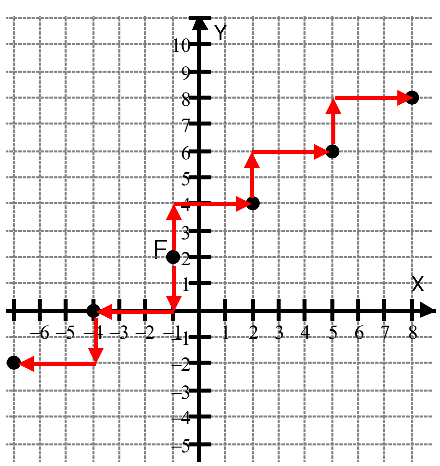
Ahora bien, la pendiente es una razón, la comparación entre dos desplazamientos; el numerador es el desplazamiento vertical y el denominador es el desplazamiento horizontal, esto se puede representar de la siguiente forma:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

El símbolo Δ significa incremento o cambio, es decir, el cambio que se da tanto en el desplazamiento vertical como en el horizontal.

La pendiente es $m=\frac{2}{3}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$, el cambio en el desplazamiento vertical es 2 y en el horizontal es 3.

Las coordenadas de los siguientes puntos son: $(2,4)$, $(5,6)$ y $(8,8)$, los cuales se obtienen de dichos desplazamientos, como se muestra en siguiente gráfica.



Como la pendiente es un cociente positivo, los signos del numerador y denominador deben de ser iguales, entonces, si son positivos, a partir del punto F, se desplaza 2 hacia arriba y 3 a la derecha, como se muestra en la gráfica.

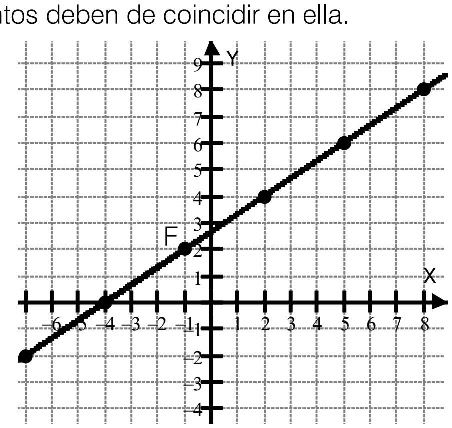
$$m=\frac{2}{3} \qquad \frac{+}{+} \qquad \frac{\text{hacia arriba}}{\text{hacia la derecha}}$$

En el caso de tener signos negativos tanto en el numerador como en el denominador, como se muestra.

$$m=\frac{2}{3}=\frac{-2}{-3} \qquad \frac{-}{-} \qquad \frac{\text{hacia abajo}}{\text{hacia la izquierda}}$$

Los puntos serían $(-4,0)$ y $(-7,-2)$, como se ve en la gráfica.

Si se dibuja la línea recta, todos los puntos deben de coincidir en ella.

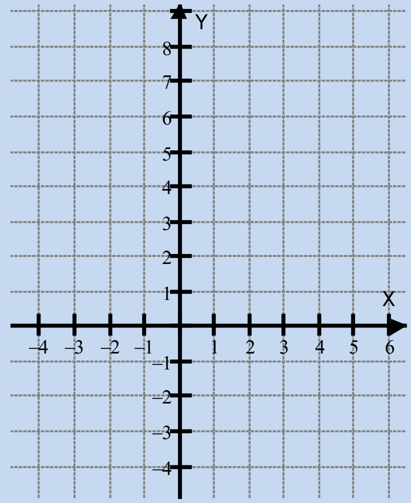


Actividad: 2

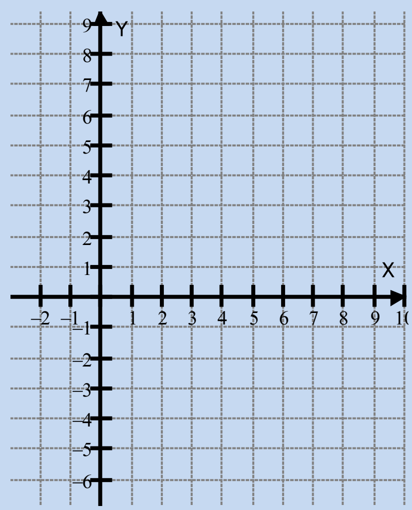
Encuentra lo que se pide en cada uno de los problemas y realiza la gráfica correspondiente.

1. Calcula la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos:

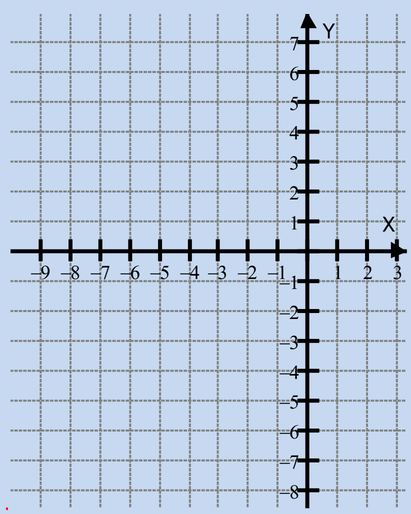
   a) $V(-2, 8)$ y $W(5, 4)$.



b) $S(8, -4)$ y $T(8, 5)$

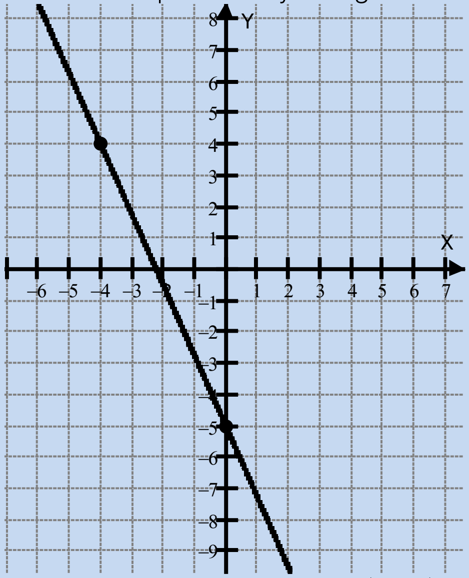


c) $V\left(\frac{1}{2}, -6\right)$ y $W\left(-\frac{9}{2}, -6\right)$

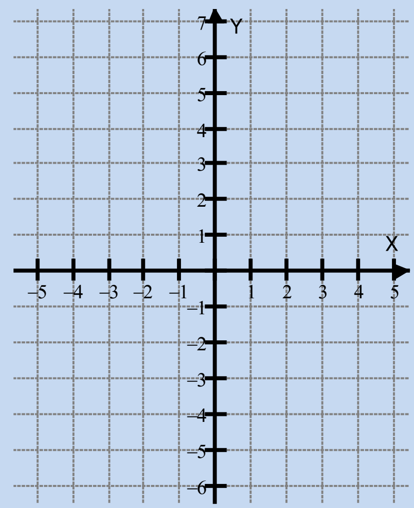


Actividad: 2 (continuación)

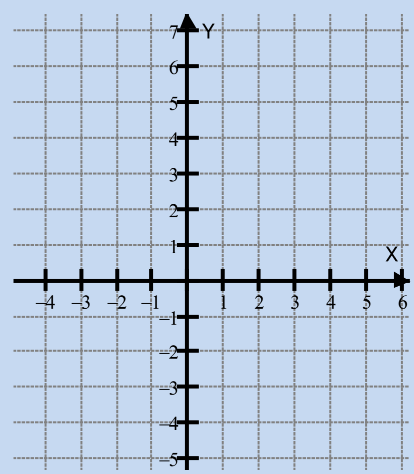
2. Determina la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta cuya gráfica es:



3. Una recta pasa por el punto $A(-3,4)$ y $B(2,y)$, encuentra la ordenada del punto B, si la pendiente de la recta es -1.



4. Encuentra tres puntos colineales con el punto $K(2,3)$, si la recta por donde pasan tiene una pendiente igual a -4.



<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 2</td><td colspan="3">Producto: Ejercicios.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Reconoce la pendiente y el ángulo de inclinación de rectas.</td><td colspan="3">Calcula la pendiente y el ángulo de inclinación de rectas definidas por dos puntos.</td><td colspan="2">Muestra interés al realizar la actividad.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Actividad: 3

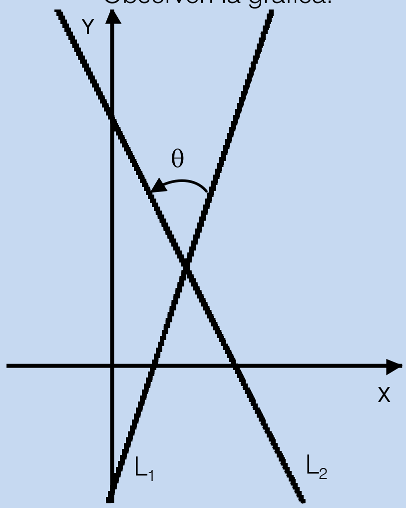
En equipo, resuelve los siguientes cuestionamientos.

1. Si conocen las coordenadas de 3 puntos, además de observar su gráfica, ¿cómo demostrarían que son colineales?

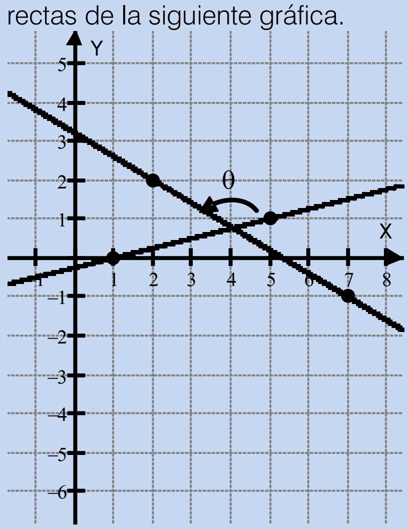
2. Diseñen un ejemplo donde demuestren que tres puntos son colineales.

Actividad: 3 (continuación)

3. Si se tienen dos rectas, ¿cómo podrían encontrar el ángulo que forman al cortarse? Observen la gráfica.



4. Con el procedimiento que establecieron en el problema anterior, encuentren el ángulo que forman las rectas de la siguiente gráfica.



5. Utiliza el problema anterior para demostrar que la fórmula $\tan\theta = \dfrac{m_f - m_i}{1 + m_f m_i}$ es otro método para encontrar el ángulo entre dos rectas, si m_i es la pendiente de la recta donde inicia el ángulo y m_f es la pendiente de la recta donde finaliza el ángulo.

Evaluación						
Actividad: 3	Producto: Demostraciones.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Reconoce el uso de la pendiente y el ángulo de inclinación para hacer demostraciones específicas.	Demuestra diferentes conceptos utilizando la pendiente y el ángulo de inclinación de una recta.			Presenta disposición al trabajo colaborativo con sus compañeros.		
Coevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

Paralelismo y perpendicularidad entre dos rectas.

Con la siguiente actividad, se establecerán las características que deben de poseer las pendientes de las rectas paralelas y perpendiculares.

Actividad: 4

En equipo, respondan los siguientes cuestionamientos y realicen la gráfica correspondiente.

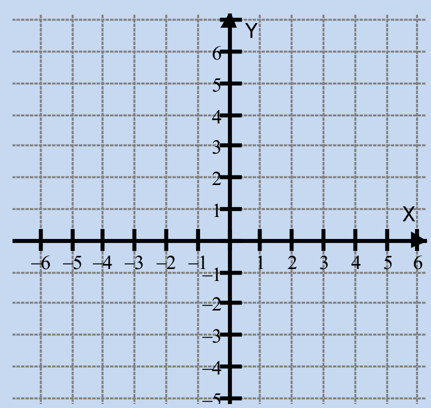
1. ¿Qué son las rectas paralelas?

2. Utilizando el concepto de pendiente, ¿cómo demostrarías que dos rectas son paralelas?

3. Con el método que describiste en la pregunta anterior, comprueba que las siguientes parejas de rectas definidas por los puntos, son paralelas.

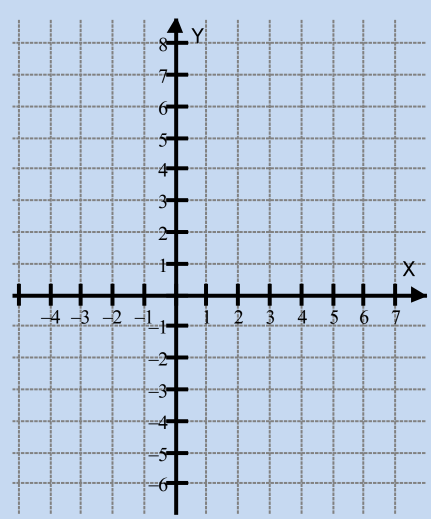
a) $L_1: A(-5,2)$ y $B(-2,4)$

$L_2: C(-2,1)$ y $D(1,3)$



b) $L_1: S(3,-4)$ y $T(0,2)$

$L_2: U(6,1)$ y $V(3,7)$



Actividad: 4 (continuación)

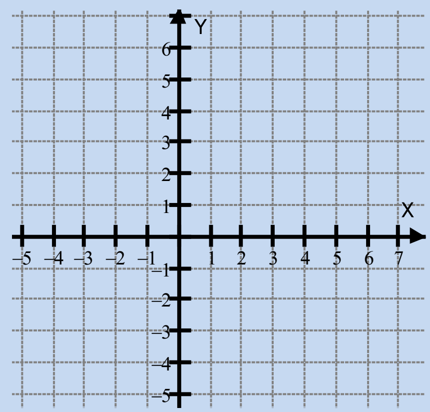
4. ¿Qué son las rectas perpendiculares?

5. ¿Cómo demostrarías que dos rectas son perpendiculares?

6. Utilizando el método que describiste en la pregunta anterior, comprueba que las siguientes parejas de rectas definidas por los puntos, son perpendiculares.

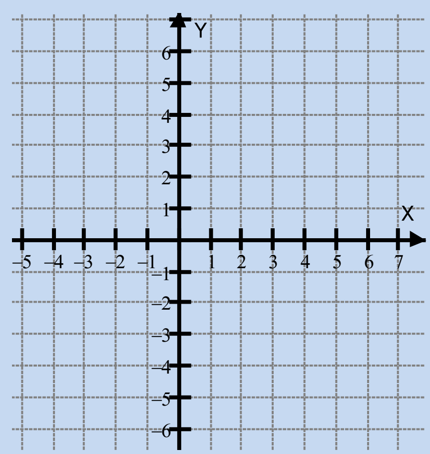
   a) $L_1: M(5,1)$ y $N(0,3)$

      $L_2: P(2,-1)$ y $Q(4,4)$



   b) $L_1: D(2,3)$ y $E(6,4)$

      $L_2: F(4,2)$ y $G(3,6)$



<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 4</td><td colspan="3">Producto: Ejercicios.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><td colspan="6">Saberes</td></tr>
<tr><td>Conceptual</td><td colspan="3">Procedimental</td><td colspan="2">Actitudinal</td></tr>
<tr><td>Identifica rectas paralelas y perpendiculares mediante la pendiente y ángulo de inclinación de la recta.</td><td colspan="3">Utiliza la pendiente y el ángulo de inclinación para establecer si dos rectas son paralelas o perpendiculares.</td><td colspan="2">Aporta puntos de vista personales con apertura y considera los de otras personas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Con la actividad anterior se concluye, que dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales y son perpendiculares si son recíprocas y de signo contrario, es decir, si al multiplicarse dan como resultado -1.

Actividad: 5

Contesta correctamente lo que se te pide.

1. De acuerdo a estas dos afirmaciones completa la tabla para que se cumpla que las rectas son paralelas o perpendiculares, según sea el caso.

I. Dos rectas L_1 y L_2 son paralelas si sus pendientes son iguales ($m_1 = m_2$).
II. Dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario ($m_1 m_2 = -1$)

Pendiente de la recta L_1	Pendiente de la recta L_2	Las rectas son:
$m_1 = 1/4$		Perpendiculares
	$m_2 = 7$	Perpendiculares
$m_1 = -5/2$		Paralelas
	$m_2 = -2/3$	Perpendiculares
$m_1 = 1$		Paralelas
	$m_2 = -6$	Perpendiculares
	$m_2 = 3/8$	Paralelas
$m_1 = -1$		Perpendiculares
$m_1 = 1/2$		Paralelas
	$m_2 = -7/5$	Perpendiculares
$m_1 = 1/5$		Paralelas

2. ¿Cómo se puede demostrar, utilizando el concepto de pendiente, que un triángulo es rectángulo?

3. ¿Cómo son las pendientes de los lados de un paralelogramo?

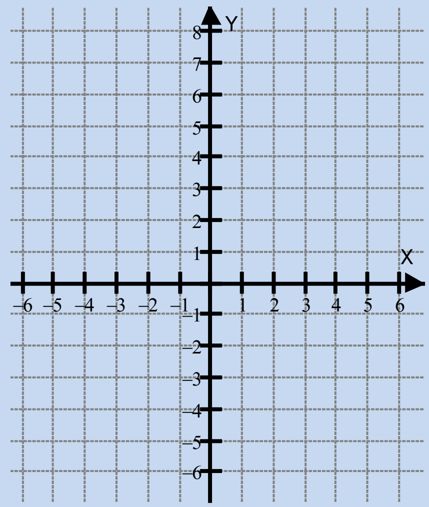
<table>
<tr><td colspan="6">Evaluación</td></tr>
<tr><td>Actividad: 5</td><td colspan="3">Producto: Complementación de la tabla.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><td colspan="6">Saberes</td></tr>
<tr><td>Conceptual</td><td colspan="3">Procedimental</td><td colspan="2">Actitudinal</td></tr>
<tr><td>Reconoce las características de las pendientes de rectas paralelas y perpendiculares.</td><td colspan="3">Ubica y encuentra las características de las pendientes de rectas paralelas y perpendiculares.</td><td colspan="2">Aprecia la importancia de las características de las pendientes de las retas paralelas y perpendiculares.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

■ Cierre

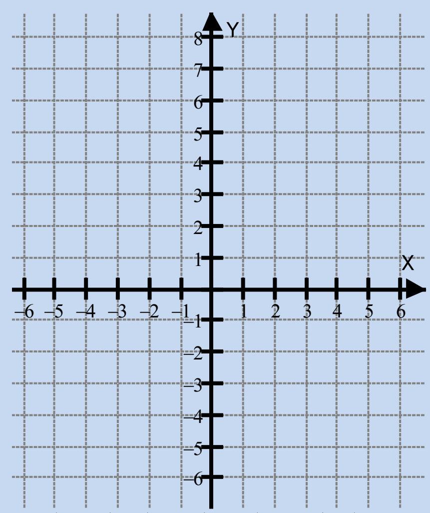
Actividad: 6

Resuelve los siguientes prolemas.

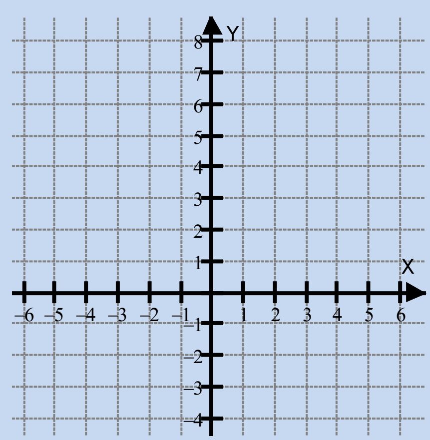
1. Utiliza el concepto de pendiente para comprobar que los puntos $A(3,-1)$, $B(-3,2)$ y $C(1,0)$ son colineales.



2. Una recta de pendiente $m=-\frac{3}{4}$ pasa por el punto $K(-2,5)$ y $L(6,y)$. Encuentra el valor de la ordenada faltante.

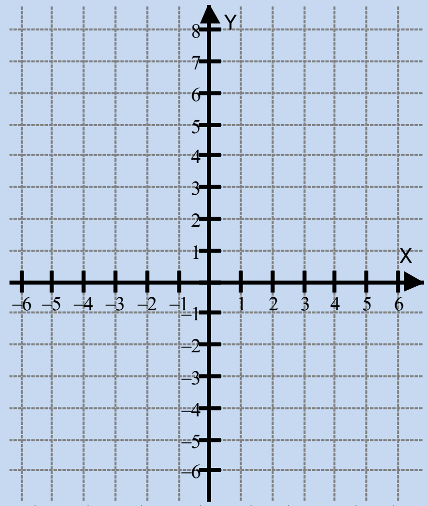


3. Utiliza el concepto de pendiente para comprobar que los puntos $M(0,-2)$, $N(4,5)$, $O(-1,2)$ y $P(5,1)$ son vértices de un paralelogramo.

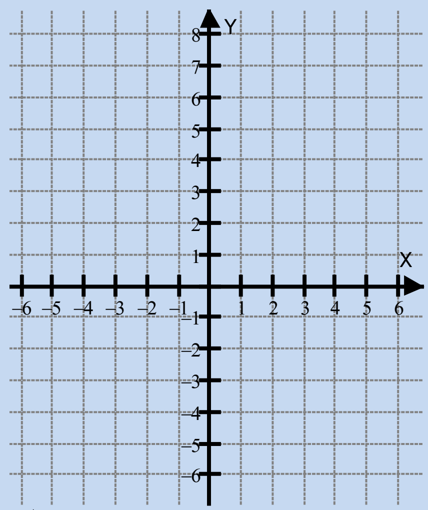


Actividad: 6 (continuación)

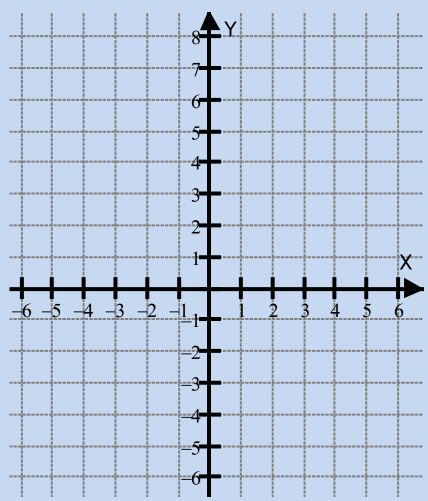
4. Comprueba si la recta que pasa por los puntos $A(2,3)$ y $B(5,-1)$ es perpendicular a la recta que pasa por $C(-4,-1)$ y $D(0,2)$



5. Demuestra que las diagonales del cuadrado formado por los puntos $J(1,-3)$, $K(6,-3)$, $L(6,2)$ y $D(1,\ 2)$, son perpendiculares.

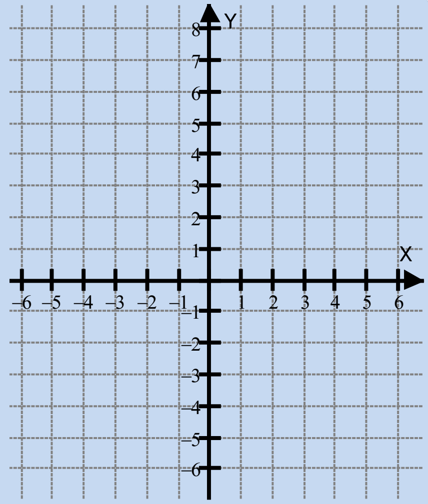


6. Considera el triángulo formado por los puntos $C(1,-2)$, $D(8,1)$ y $E(3,5)$. Sea F y G los puntos medios de los segmentos CE y DE respectivamente, muestra que el segmento FG es paralelo al segmento CD (FG // CD).

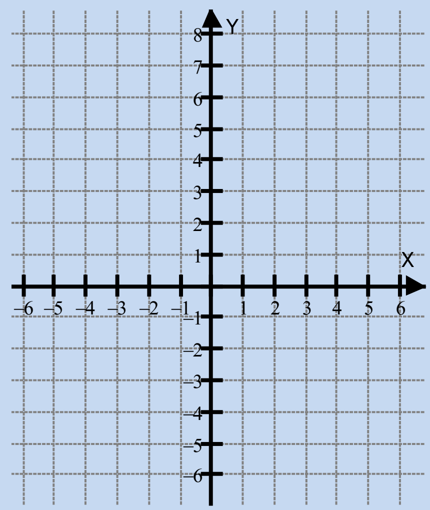


Actividad: 6 (continuación)

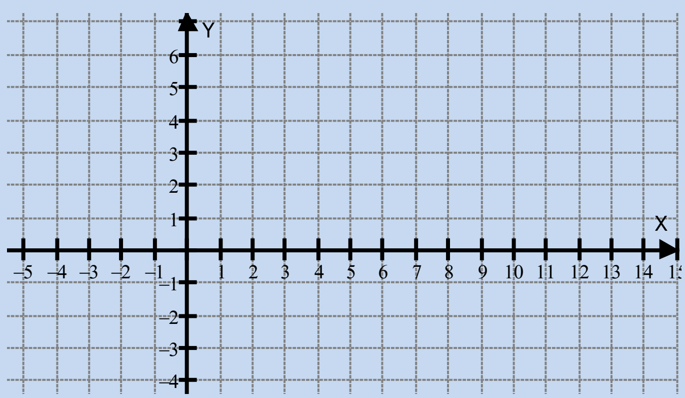
7. Demuestra que el triángulo de vértices $R(1,2)$, $S(3,4)$ y $T(-1,6)$ es isósceles y halla uno de los ángulos iguales.



8. Los puntos $T(-2,4)$, $U(1,6)$ y $V(5,-1)$ son vértices del paralelogramo TUVW, el cuarto vértice W es opuesto a U. Determina las longitudes de las diagonales del paralelogramo y los ángulos interiores del paralelogramo.



9. Dos automóviles empiezan a transitar por un distribuidor vial. El automóvil A se dirige de Oeste a Este y empieza a subir en el punto $(-5,0)$ y llega al punto más alto del puente en $(1,2)$. El automóvil B transita de Este a Oeste y empieza en el punto $(14,0)$, el punto más alto del puente de su carril es $(1,4)$. Encuentra:



Actividad: 6 (continuación)

a) Los ángulos de inclinación de cada uno de los puentes.

b) ¿Cuál de ellos tiene mayor altura?

c) La distancia que recorre cada automóvil, desde que inician en los puentes hasta el punto más alto de cada uno de ellos.

<table>
<tr><td colspan="6">Evaluación</td></tr>
<tr><td>Actividad: 6</td><td colspan="3">Producto: Problemas de aplicación.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><td colspan="6">Saberes</td></tr>
<tr><td>Conceptual</td><td colspan="3">Procedimental</td><td colspan="2">Actitudinal</td></tr>
<tr><td>Identifica las pendientes de rectas paralelas y perpendiculares.</td><td colspan="3">Utiliza las pendientes de rectas paralelas y perpendiculares, así como también el ángulo entre ellas.</td><td colspan="2">Aprecia la importancia del concepto de pendiente en rectas paralelas y perpendiculares.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Secuencia didáctica 2.
La recta como lugar geométrico.

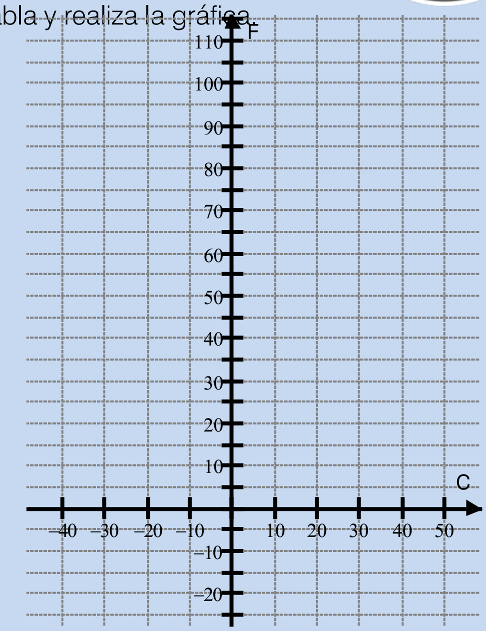
Inicio

Actividad: 1

Lee con cuidado y resuelve el siguiente problema.

1. La fórmula $F = \frac{9}{5}C + 32$ permite transformar una temperatura dada en grados Celsius a grados Fahrenheit. Utiliza la fórmula para completar la siguiente tabla y realiza la gráfica.

°C	–30	–20	–10	0	10	20	30	40	50
°F		–4					86		



a) ¿Cuál es la pendiente de la recta?

b) ¿En qué punto corta la recta al eje vertical?

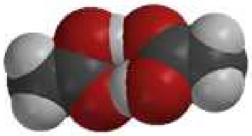
c) De acuerdo al resultado de los incisos anteriores, ¿cómo los visualizas en la fórmula?

Evaluación						
Actividad: 1	Producto: Problema de aplicación.				Puntaje:	
Saberes						
Conceptual	Procedimental				Actitudinal	
Identifica la pendiente y la ordenada en el origen, en la fórmula que representa un problema de comportamiento lineal.	Grafica y describe la pendiente en la fórmula que representa un problema de comportamiento lineal.				Muestra una buena disposición para realizar la actividad.	
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

Desarrollo

En muchos fenómenos de diversas áreas del conocimiento se observa el comportamiento lineal, es decir, es modelado mediante la línea recta, como por ejemplo, en:

Física: El movimiento rectilíneo uniforme se caracteriza porque la trayectoria de un móvil es una línea recta, recorriendo distancias iguales en tiempos iguales, su velocidad es constante.



Química: El número de partículas de una sustancia química es directamente proporcional al número de moles, es decir, que el número de partículas crece de manera constante y esa constante se llama Número de Avogadro (6.022×10^{23}).

Economía: Cuando se quiere calcular la utilidad que deja un determinado artículo, se establece el precio de venta y el costo como una constante y dependiendo del número de artículos vendidos se obtiene la utilidad. En economía puede haber varios modelos y uno de los más usados es el lineal.

Literatura: En Latino América un adulto promedio lee alrededor de 300 palabras por minuto, y si varía el tiempo de lectura de una persona en particular, se convierte en un modelo un comportamiento lineal, en el cual el número de palabras leídas depende del tiempo de lectura.

Estos son sólo algunos ejemplos de la aplicación de la línea recta; en actividades posteriores se retomarán ejemplos de situaciones en las que se practique la misma.

En esta secuencia aprenderás a representar gráficamente la línea recta, para ello se tiene que proporcionar algunos elementos que la definen. En Matemáticas 1 aprendiste a graficar la línea recta utilizando varios métodos. En el siguiente ejemplo se abordarán estos conocimientos, para retomarlos y formalizar la definición de línea recta como lugar geométrico y la forma pendiente ordenada en el origen de la línea recta.

Ejemplo 1.
Mario realizó un contrato de compra-venta para adquirir una casa, la cual tiene un precio de $ 574,000.00, él dio un enganche de $250,000.00 y el resto en mensualidades de $2,700.00. La ecuación $y = 324000 - 2700x$ representa la cantidad "y" que debe Mario después de "x" pagos. Realizar la gráfica de la ecuación.

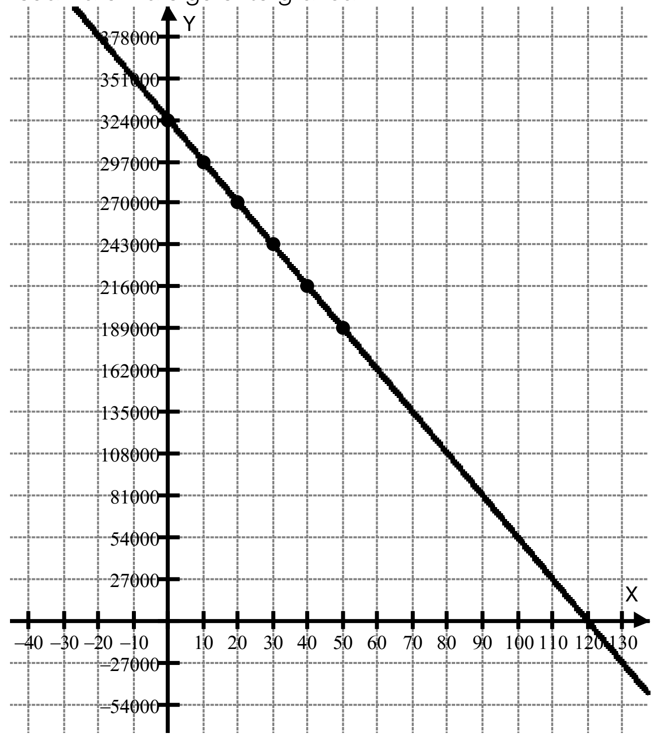
La ecuación $y = 324000 - 2700x$ puede graficarse ubicando puntos, para ello se puede utilizar el método de tabulación, como lo aprendiste en matemáticas 1, para ello se proporcionan valores a la variable "x", se sustituyen en la ecuación y se encuentran los correspondientes valores de "y"

Los valores que se tomarán están expresados en la tabla siguiente:

x	y
0	324000
10	297000
20	270000
30	243000
40	216000
50	189000

$y = 324000 - 2700(0) = 324000$
$y = 324000 - 2700(10) = 297000$
$y = 324000 - 2700(20) = 270000$
$y = 324000 - 2700(30) = 243000$
$y = 324000 - 2700(40) = 216000$
$y = 324000 - 2700(50) = 189000$

La ubicación de los puntos se visualiza en la siguiente gráfica.



En este ejemplo se observan varios elementos que vale la pena tomar en cuenta para posteriormente formalizar la teoría, como es el hecho de que la línea recta corta al eje Y en 324000 y además que si se toman dos puntos cualesquiera, la pendiente es:

$$(10, 297000) = (x_1, y_1)$$
$$(20, 270000) = (x_2, y_2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{270000 - 297000}{20 - 10}$$
$$m = \frac{-27000}{10}$$
$$m = -2700$$

El corte con el eje Y es el punto (0, 324000) el cual se denomina *ordenada en el origen* y se le asigna la letra “b”.

Si se compara lo observado con la ecuación, se tiene:

Ordenada en el origen

Pendiente

$$y = 324000 - 2700x$$

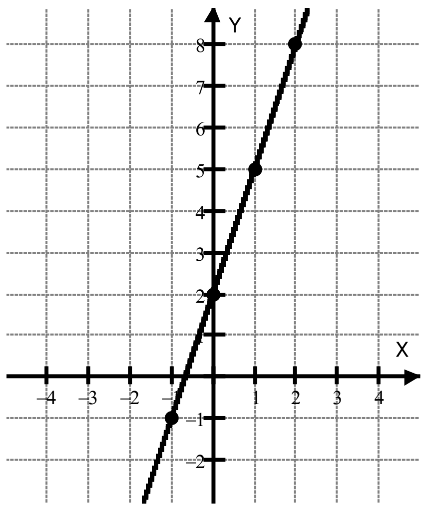
Como se mencionó anteriormente, la pendiente se obtiene de cualquier pareja de puntos, ya que todos tienen la misma pendiente, de aquí se puede formalizar la definición de la recta como lugar geométrico.

Definición de la recta.

Es el lugar geométrico del conjunto de puntos, tal que si se toman dos puntos cualesquiera de ellos la pendiente es constante.

Para comprobar la definición anterior, se llevará a cabo el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.
La gráfica corresponde a la ecuación $y = 3x + 2$



Entonces, si se toman dos puntos cualesquiera, la pendiente debe ser la misma, ya que se encuentran en la línea recta, para ello, se toman las parejas de puntos siguientes y se calcula la pendiente.

$$(-1,-1) = (x_1, y_1)$$
$$(1,5) = (x_2, y_2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{5+1}{1+1}$$
$$m = \frac{6}{2}$$
$$m = 3$$

$$(0,2) = (x_1, y_1)$$
$$(1,5) = (x_2, y_2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{5-2}{1-0}$$
$$m = \frac{3}{1}$$
$$m = 3$$

$$(-1,-1) = (x_1, y_1)$$
$$(2,8) = (x_2, y_2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{8+1}{2+1}$$
$$m = \frac{9}{3}$$
$$m = 3$$

Al igual que el ejemplo anterior, se observa en la gráfica, que la ordenada en el origen (corte con el eje Y) es (0, 2), el cual se puede observar en la ecuación, así como la pendiente.

Pendiente

Ordenada en el origen

$$y = 3x + 2$$

Con ello se puede determinar la forma *pendiente-ordenada en el origen*.

Condiciones para la gráfica de la línea recta.

Con los ejemplos anteriores, se dedujo que de la ecuación de la recta se puede visualizar tanto la pendiente como la ordenada en el origen y su forma es:

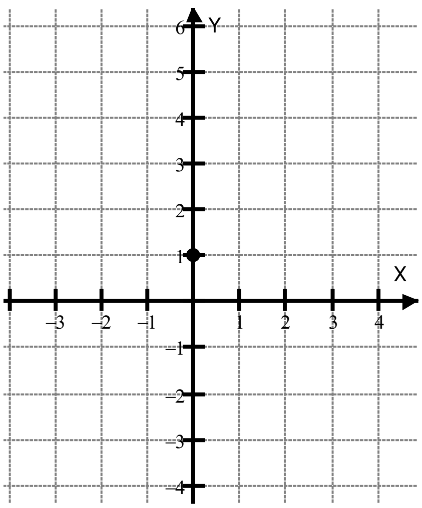
$$y = mx + b$$

La pendiente (m) y la ordenada en el origen (b) se denominan parámetros, ya que son la base para determinar el comportamiento gráfico de la línea recta, como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.
Graficar la recta cuya ecuación es $y = -2x + 1$

$m = -2$
$b = 1$

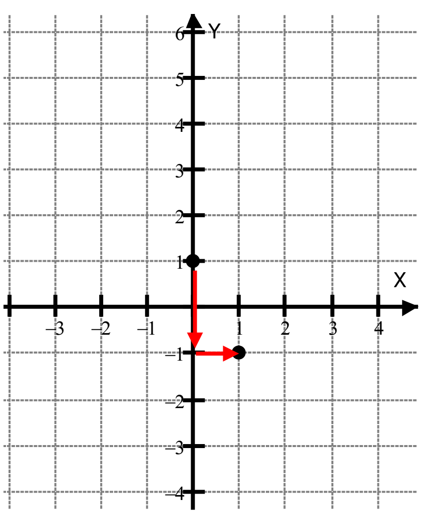
Primero se ubica *b* en el eje vertical.

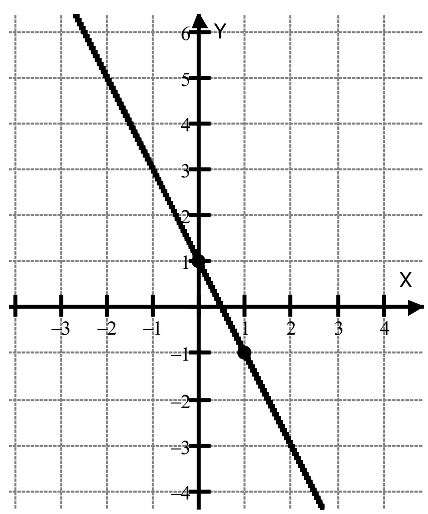


Con la ayuda de la pendiente, se traza el siguiente punto.

A partir del punto que se tiene en la gráfica, se realizan los desplazamientos verticales y horizontales con la información de la pendiente, como sigue:

$$m = -2 = \frac{-2}{1} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \frac{\text{2 unidades hacia abajo}}{\text{1 unidad a la derecha}}$$





También se presentan problemas en donde se da la ecuación expresada en su forma general que es $Ax + By + C = 0$, para ello, se debe despejar la variable "y".

$$Ax + By + C = 0$$
$$By = -Ax - C$$
$$y = \frac{-Ax - C}{B}$$
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Del despeje anterior se deduce que la pendiente y la ordenada en el origen se expresan:

$$\boxed{m = -\frac{A}{B}}$$

$$\boxed{b = -\frac{C}{B}}$$

Lo anterior se ejemplificará a continuación.

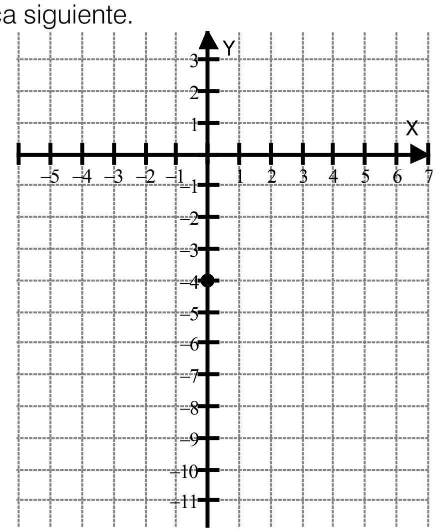
Ejemplo 2.
Graficar la recta que tiene como ecuación $5x + 2y + 8 = 0$.
Se puede despejar la ecuación o bien utilizar las fórmulas de la pendiente y ordenada en el origen, si se utilizan estas últimas, sólo es necesario identificar los coeficientes A, B y C de la ecuación.

$$5x + 2y + 8 = 0$$

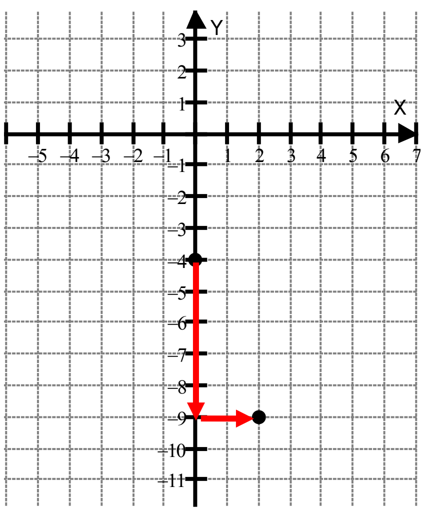
A=5
B=2
C=8

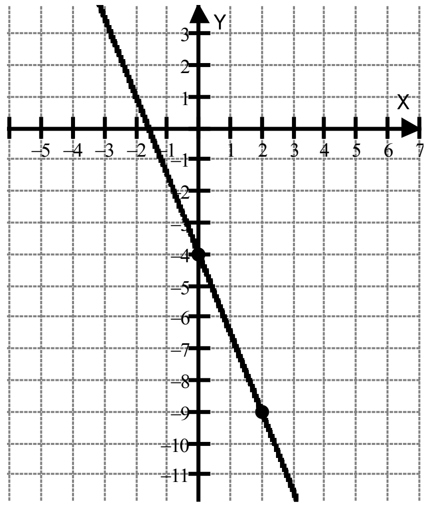
$$m = -\frac{A}{B} \qquad b = -\frac{C}{B}$$
$$m = -\frac{5}{2} \qquad b = -\frac{8}{2}$$
$$b = -4$$

La ordenada en el origen (b) genera el punto (0, – 4), el cual es el primer punto que se ubica en el plano cartesiano, para después utilizar los desplazamientos de la pendiente y así encontrar el segundo punto, como se observa en la gráfica siguiente.



$$m = -\frac{5}{2} = \frac{-5}{2} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \frac{\text{5 unidades hacia abajo}}{\text{2 unidades a la derecha}}$$





La bondad de la Geometría Analítica es que permite comprobar los resultados obtenidos; para comprobar el ejemplo anterior, se utiliza el punto encontrado a partir de la pendiente, el cual es (2, – 9), y si pertenece a la recta, debe satisfacer la ecuación, es decir, que al sustituir las coordenadas en la ecuación se debe cumplir la igualdad.

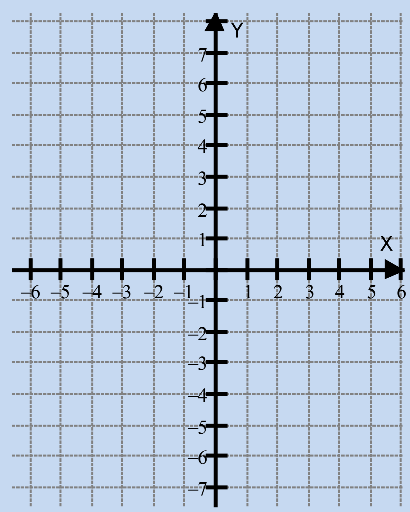
$$
\begin{aligned}
5x + 2y + 8 &= 0\\
5(2) + 2(-9) + 8 &= 0\\
10 - 18 + 8 &= 0\\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Con ello queda comprobado que la gráfica es correcta.

Actividad: 2

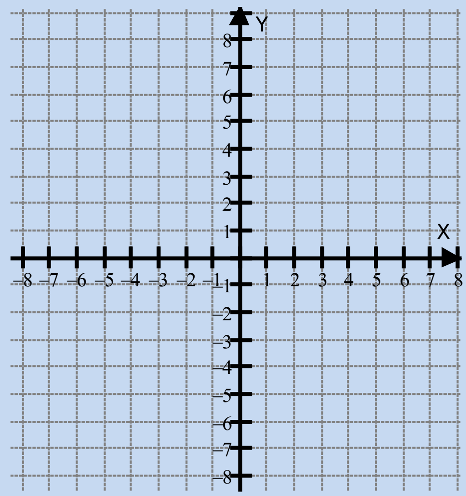
Grafica las rectas que cumplen con las siguientes condiciones:

1. Pasa por los puntos $A(3,2)$ y $B(-1,-4)$.

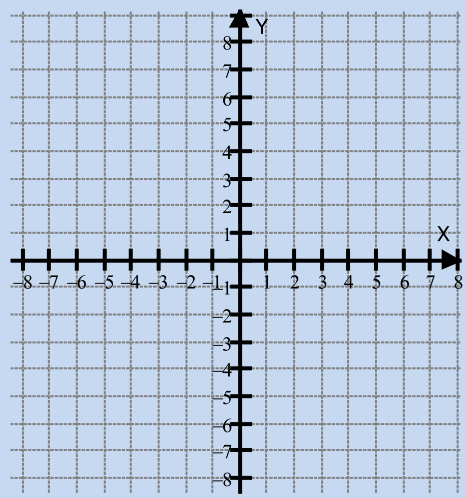


Actividad: 2 (continuación)

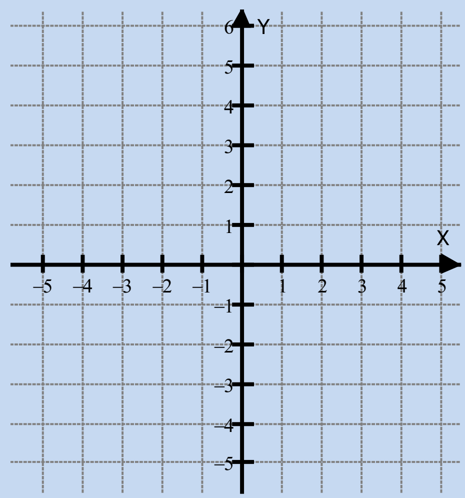
2. Pasa por los puntos $D(-6,2)$ y $E(7,0)$.



3. Pasa por el punto $R(0,-5)$ y su pendiente es $m=3$.

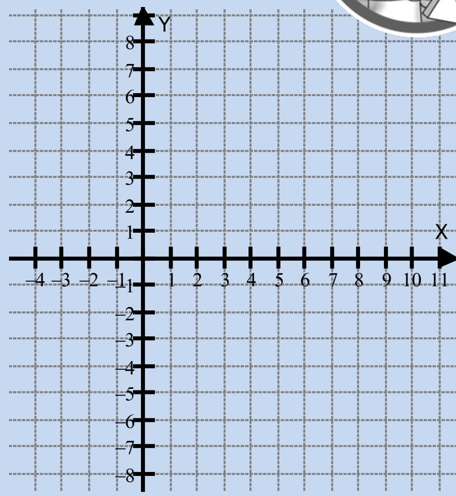


4. Pasa por el origen y su pendiente es $m=-1$.

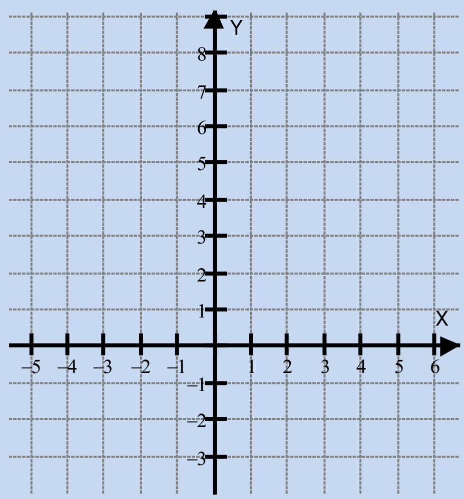


Actividad: 2 (continuación)

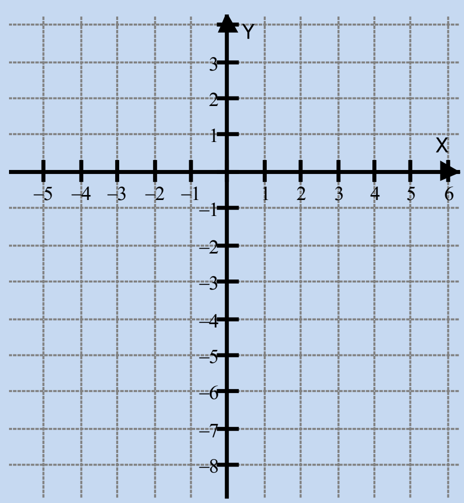
5. Pasa por el punto $K(7,8)$ y su pendiente es $m=-\frac{4}{3}$.



6. Su ecuación es $y=-2x+7$.

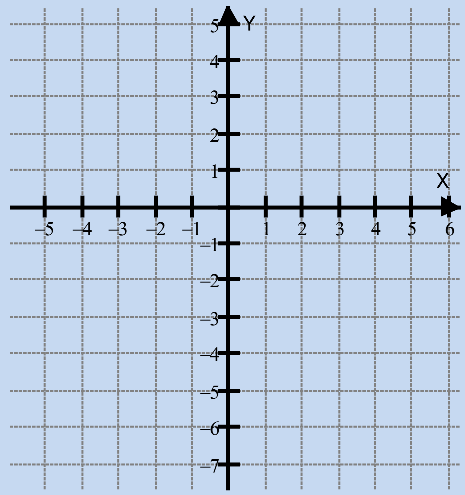


7. Su ecuación es $y=\frac{5}{2}x-8$.

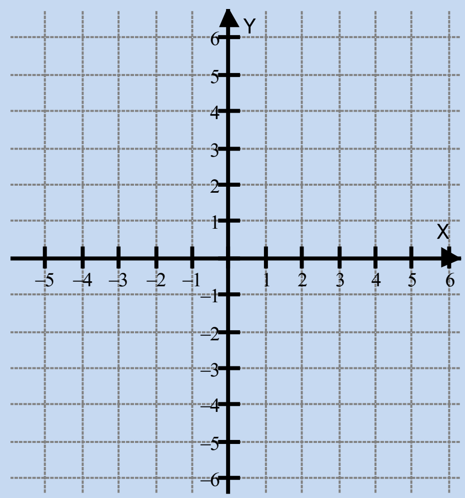


Actividad: 2 (continuación)

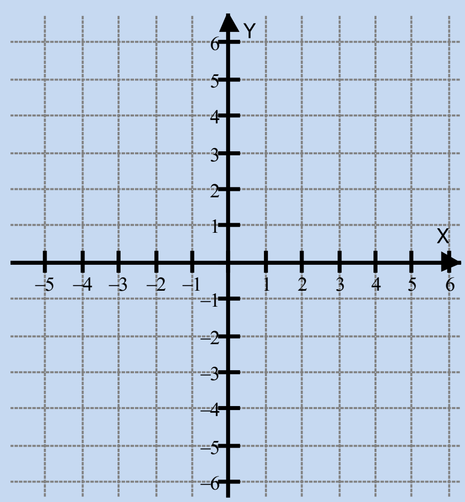
8. Su ecuación es $y = -\frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$.



9. Su ecuación es $5x + y - 1 = 0$.



10. Su ecuación es $x - 3y - 9 = 0$.



Evaluación					
Actividad: 2	Producto: Gráficas.			Puntaje:	
Saberes					
Conceptual	Procedimental			Actitudinal	
Identifica la forma y los elementos requeridos para realizar la gráfica de la recta.	Traza la gráfica de una recta específica, dados: a) Su pendiente y uno de sus puntos. b) Dos puntos. c) La forma pendiente-ordenada en el origen.			Aprecia la utilidad de reconocer los diferentes elementos de una recta para realizar la gráfica.	
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente	

Sitios Web recomendados:

En el siguiente sitio, puedes bajar el programa Winplot, que te ayudará a comprobar las gráficas que realizaste en la actividad anterior.

http://math.exeter.edu/rparris

En resumen, se puede trazar el lugar geométrico llamado recta, si:

1. Se conoce al menos dos puntos por donde pasa la recta.
2. Se conoce al menos un punto por donde pasa la recta y su pendiente.

Otro de los aspectos importantes es obtener información a partir de la gráfica trazada, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.
Rodrigo compró un terreno campestre en la Hacienda de los Tesoros, la cual se ubica al poniente de la ciudad de Hermosillo, rumbo a Bahía Kino. Rodrigo se dirige del terreno rumbo a la Ciudad en su bicicleta, y su trayectoria se describe mediante la ecuación $20t + d - 28 = 0$, donde t es el tiempo transcurrido en horas y d es la distancia recorrida en kilómetros.

a) Elabora la gráfica.
b) ¿Qué distancia tiene que recorrer para llegar a Hermosillo?
c) ¿Cuánto tiempo requiere para llegar a su destino?
d) Realiza una tabla donde ubiques 6 posiciones de su trayectoria.
e) ¿Qué velocidad promedio tiene el automóvil?
f) ¿Cómo se relaciona la velocidad promedio con la ecuación en su forma pendiente-ordenada en el origen?

Para realizar la gráfica se transformará la ecuación $20t + d - 28 = 0$ en su forma pendiente-ordenada en el origen, recordando que para ello, se puede despejar o utilizar las fórmulas para encontrar la pendiente y la ordenada en el origen, a partir de la ecuación general de la recta.

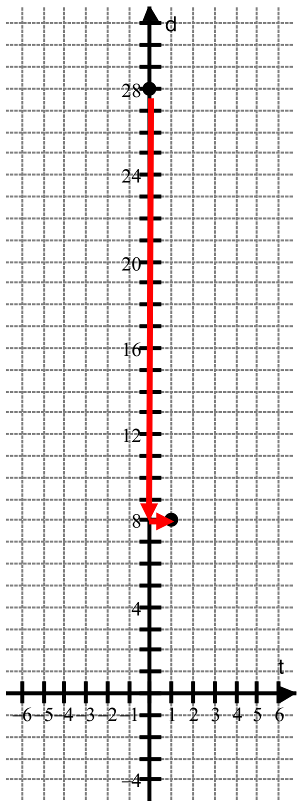
Es necesario recordar que la forma antes mencionada es $y = mx + b$, la cual se debe ajustar al tipo de variables indicadas en el problema, entonces ésta cambiaría a $d = mt + b$, donde “t” es la variable independiente y “d” la variable dependiente.

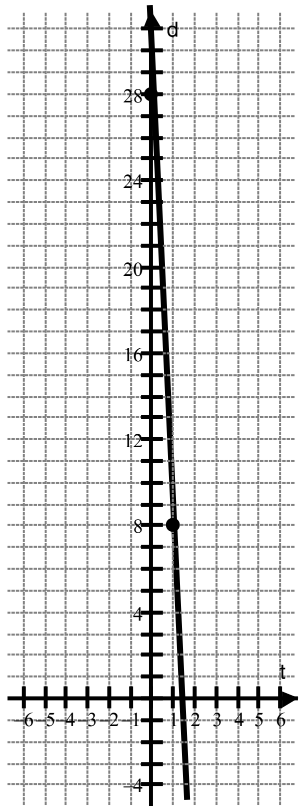
$$20t + d - 28 = 0$$

$$d = -20t + 28$$

$m = -20$
$b = 28$

Al graficar la ordenada en el origen (0, 28) y obtener el punto (1, 8) utilizando la pendiente se puede trazar la recta, como se muestra en las siguientes gráficas.





Las preguntas de los incisos b) y c) se identifican como las intersecciones con los ejes, puesto que si t=0 significa que Rodrigo no ha salido de su terreno, así que tendría que recorrer los 28 km (la ordenada en el origen), y cuando d=0, se encontraría en la ciudad, habiendo transcurrido más de 1 hora. Para conocer el número exacto donde corta la recta con los ejes, se tiene que realizar un despeje de la ecuación general, haciendo a t=0 y posteriormente a d=0, como se muestra a continuación.

Si $t = 0$

$$20t + d - 28 = 0$$
$$d - 28 = 0$$
$$d = 28$$

Con ello se refuerza que la ordenada en el origen es (0, 28).

Si $d = 0$

$$20t + d - 28 = 0$$
$$20t - 28 = 0$$
$$t = \frac{28}{20} = \frac{7}{5}$$
$$t = 1.4$$

El punto encontrado es (1.4, 0) conocido como abscisa en el origen, por ello se puede decir que el tiempo que invierte Rodrigo en regresar es de 1.4 horas.

Para resolver el inciso c) se tiene que elaborar una tabla a partir de la ecuación, para ello se sustituyen valores en la variable independiente t, como se muestra a continuación:

t	0	0.25	0.5	0.75	1	1.4
d						

Para conocer la distancia recorrida a partir de los tiempos transcurridos establecidos en la tabla anterior, sólo es necesario sustituir la forma pendiente-ordenada en el origen.

$$d = -20t + 28$$

Po lo tanto la tabla queda:

t	0	0.25	0.5	0.75	1	1.4
d	28	23	18	13	8	0

La velocidad promedio está dada por la fórmula $v_m = \frac{d_f - d_i}{t_f - t_i}$, si se toman los puntos de los extremos la velocidad media es:

$$v_m = \frac{d_f - d_i}{t_f - t_i}$$
$$v_m = \frac{0 - 28}{1.4 - 0}$$
$$v_m = -20$$

Se pueden tomar otros dos puntos cualquiera para comprobar que la velocidad es la misma para todos los intervalos de tiempo.

$$(0.25, 23)$$
$$(0.5, 18)$$
$$v_m = \frac{d_f - d_i}{t_f - t_i}$$
$$v_m = \frac{18 - 23}{0.5 - 0.25}$$
$$v_m = \frac{-5}{0.25} = -20$$

$$(0.5, 18)$$
$$(1, 8)$$
$$v_m = \frac{d_f - d_i}{t_f - t_i}$$
$$v_m = \frac{8 - 18}{1 - 0.5}$$
$$v_m = \frac{-10}{0.5} = -20$$

Con ello se comprueba que en cualquier intervalo que se elija, la velocidad promedio es la misma.

Si observaste la fórmula de velocidad media, es la misma que la fórmula de la pendiente, y los resultados que se obtuvieron anteriormente se reflejan en forma pendiente-ordenada en el origen.

$$d = -20t + 28$$

Este ejemplo deja ver otra forma de graficar, utilizando las intersecciones de la recta con los ejes y para ello se requiere conocer la ecuación de la recta.

Ejemplo 4.

Encontrar los puntos de intersección de la recta $5x + 4y - 17 = 0$ con los ejes coordenados.

Para encontrar la intersección con el eje Y, se sustituye x=0, como se muestra a continuación.

Si $x = 0$

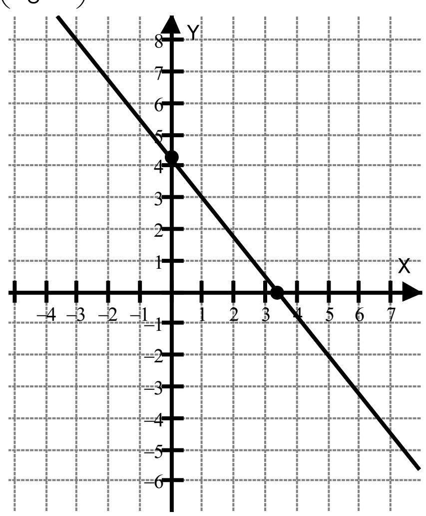
$$5x + 4y - 17 = 0$$
$$4y - 17 = 0$$
$$4y = 17$$
$$y = \frac{17}{4}$$

Y ahora se encuentra la intersección con el eje X, sustituyendo y=0.

Si $y = 0$

$$5x + 4y - 17 = 0$$
$$5x - 17 = 0$$
$$5x = 17$$
$$x = \frac{17}{5}$$

Los puntos encontrados son: $\left(0.\frac{17}{4}\right)$ y $\left(\frac{17}{5},0\right)$.

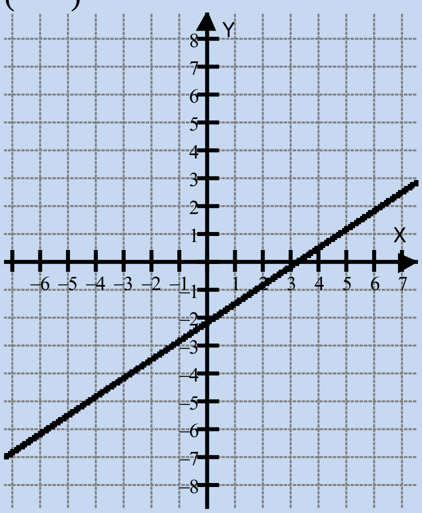


Actividad: 3

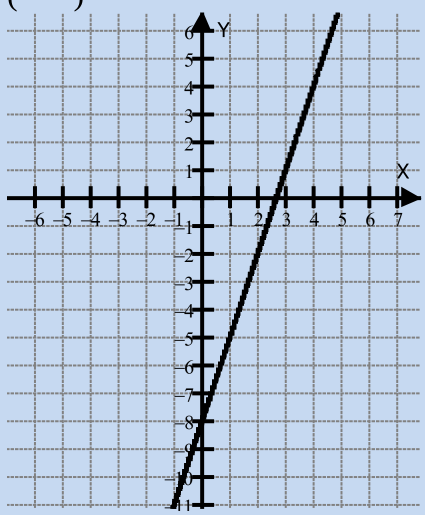
Relaciona las gráficas colocando en el paréntesis el número de la condición de la recta que le corresponde.

1. Pasa por el punto $(2,3)$ y es paralela al eje X.
2. Pasa por el punto $(1,-5)$ y es perpendicular al eje Y
3. Pasa por el punto $(5,6)$ e interseca al eje Y en $y=-3$.
4. Su ecuación es $x+2y-10=0$
5. Pasa por el punto (1, – 5) y es perpendicular a la recta $x+3y+9=0$
6. Pasa por el punto (0, 1) y es paralela a la recta $6x+7y+14=0$
7. Su ecuación es $4x-6y-13=0$.
8. Su ordenada en el origen es 2 y abscisa en el origen es – 3.

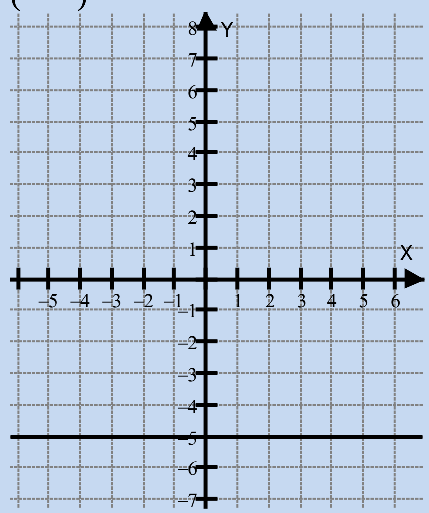
(   )



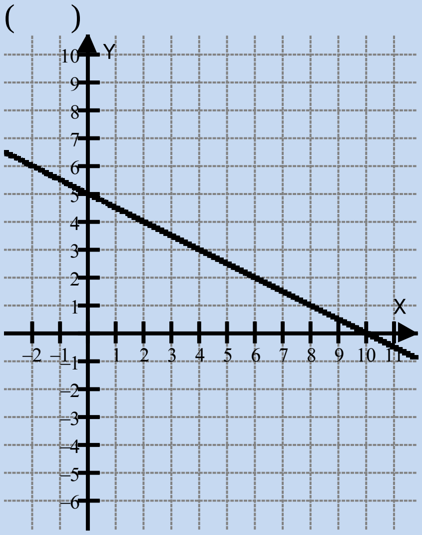
(   )



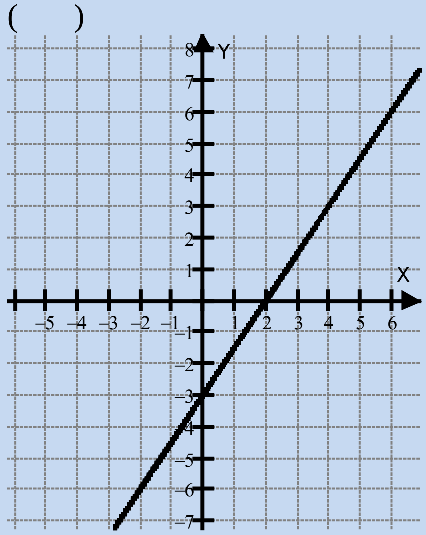
(   )



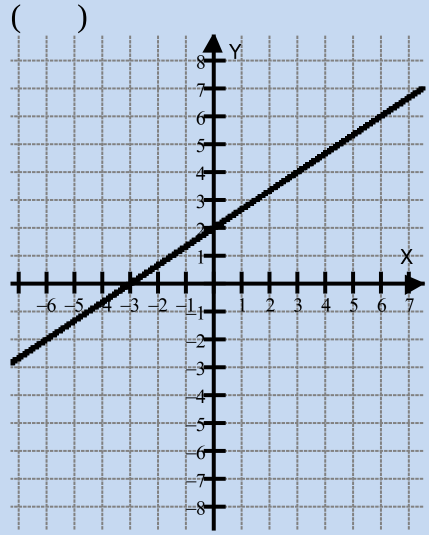
(   )



(   )

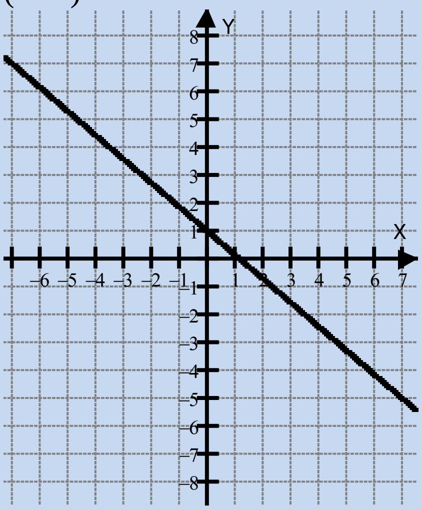


(   )

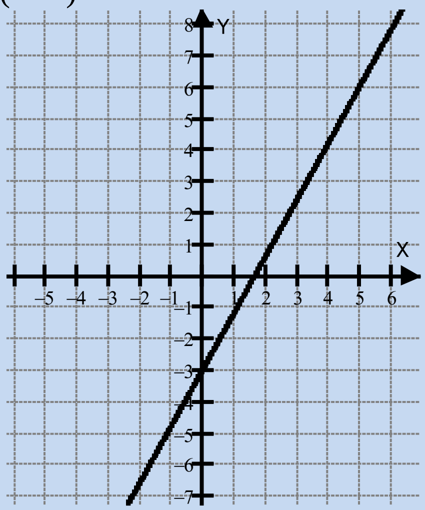


Actividad: 3 (continuación)

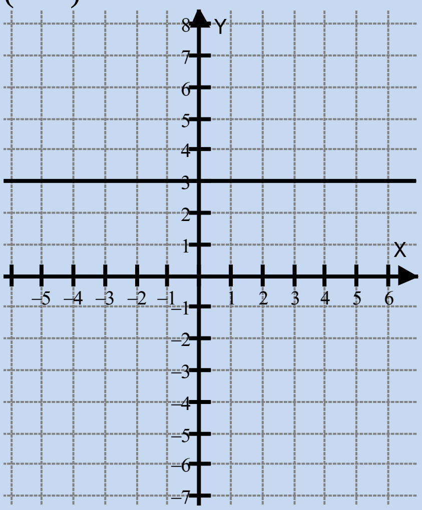
(   )



(   )

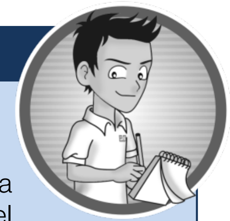


(   )



Evaluación						
Actividad: 3	Producto: Gráficas.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Identifica los elementos de la recta en las gráficas.	Ubica los elementos de la recta en la gráfica correspondiente.			Realiza la actividad con interés. Expresa sus dudas y corrige sus errores.		
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

■ Cierre



Actividad: 4

Resuelve los siguientes problemas:

1. Jazmín va a comprar discos compactos que se utilizarán en la materia de informática para todo su grupo. El vendedor le dice que la siguiente ecuación $x + 20y - 210 = 0$ proporciona el precio de los discos, donde "y" representa el precio de la cantidad de discos "x" que se comprarán, siendo el precio mínimo 6 pesos.

   a) Trazar la gráfica.
   b) Si compra 50 discos, ¿cuánto le cuesta cada uno?
   c) ¿Cuáles son la ordenada y la abscisa en el origen?

Actividad: 4 (continuación)

2. Jacinto tiene 160 m de alambre para cercar un terreno rectangular, como las dimensiones no están definidas, él comienza a elabora una tabla para decidir cuáles serán las más convenientes.

x	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
y	75	70			55		45	40		30	25		15		5

a) Completa la tabla que Jacinto comenzó a elaborar.
b) Realiza la gráfica correspondiente.
c) Calcula la pendiente de tres intervalos diferentes.
d) ¿Qué criterio sugieres que utilice Jacinto para elegir las dimensiones del terreno?

Actividad: 4 (continuación)

3. Un automóvil está en el restaurante de la Pintada a 50 Km. de Hermosillo y empieza a moverse a velocidad constante rumbo a Cd. Obregón. Si se toma como punto de partida a Hermosillo, la ecuación que modela este problema es $d = 80t + 50$, donde "d" es la distancia a la que se encuentra de Hermosillo y "t" el tiempo transcurrido.

   a) Encuentra la pendiente y la ordenada en el origen.
   b) Traza la gráfica.
   c) ¿Cuál es la velocidad que lleva el automóvil?
   d) ¿Qué distancia habrá recorrido cuando han transcurrido 2 horas?
   e) Si Cd. Obregón se encuentra a 252 Km. de Hermosillo, ¿cuánto tiempo tardó en llegar?

Actividad: 4 (continuación)

4. Se desea llenar de agua una piscina que tiene inicialmente un nivel de 1m, la llave con que se llenará logrará subir el nivel uniformemente a razón de $\frac{1}{2}$ metro por hora, si la piscina tiene una altura de 5 m, entonces la relación que existe entre el nivel y el tiempo se da con la siguiente expresión:

$$1. \quad h = \frac{1}{2}t + 1$$

a) ¿Cuál es la pendiente y la ordenada en el origen?

b) Realiza la gráfica.

Actividad: 4 (continuación)

5. Una máquina que costó \$80,000 se deprecia linealmente \$6,000 al año, la ecuación que modela el valor de la máquina en función del tiempo es:

$$V = 80{,}000 - 6{,}000t$$

a) Traza la gráfica.
b) ¿Cuánto vale al transcurrir 2.5 años?
c) ¿Cuánto es su precio inicial?
d) ¿En cuánto tiempo se deprecia su valor por completo?

Actividad: 4 (continuación)

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 4</td><td colspan="3">Producto: Problemas de aplicación.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Reconoce los elementos de la recta para solucionar problemas de la vida cotidiana.</td><td colspan="3">Resuelve problemas de la vida cotidiana mediante los elementos de la recta y su graficación.</td><td colspan="2">Aprecia la utilidad de la graficación de la recta para la solucionar problemas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

BLOQUE 4

Utiliza distintas formas de la ecuación de una recta.

Competencias disciplinares básicas:

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Unidad de competencia:

- Construye e interpreta modelos auxiliándose de distintas formas de la ecuación de la recta al resolver problemas derivados de situaciones reales, hipotéticas o teóricas.
- Interpreta tablas, gráficas y expresiones simbólicas relacionadas con diferentes formas de la ecuación de la recta.
- Argumenta la pertinencia de utilizar una forma específica de la ecuación de la recta, dependiendo de la naturaleza de la situación bajo estudio.

Atributos a desarrollar en el bloque:

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
8.1 Propone maneras de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
8.3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Tiempo asignado: 12 horas

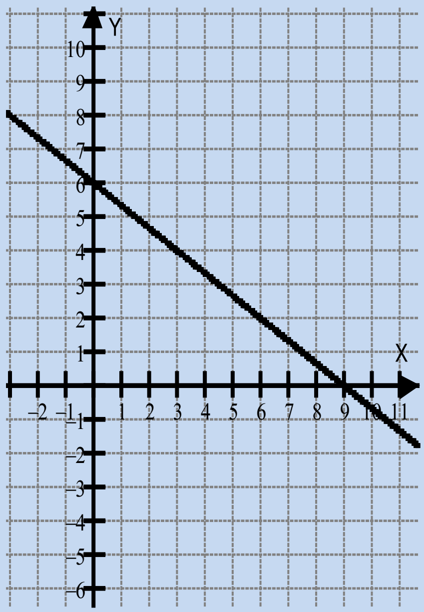
Secuencia didáctica 1.
Formas de la ecuación de la recta.

Inicio

Actividad: 1

Lee con cuidado los siguientes problemas y realiza lo que se pide.

1. Observa la siguiente gráfica para responder cada inciso.



a) ¿Cuál es la pendiente?

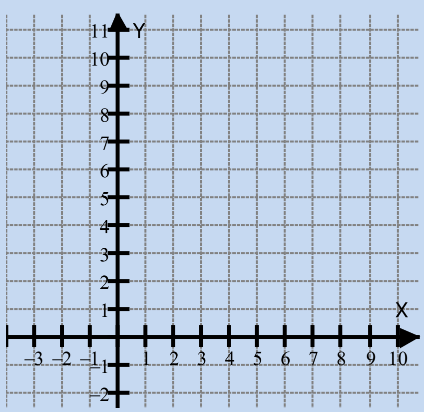
b) ¿Cuál es la abscisa y ordenada en el origen?

c) Representa a la recta con su ecuación en la forma pendiente-ordenada en el origen que describe.

2. Un albañil sabe que 4 botes de arena y 5 botes de grava hacen una buena mezcla. Si “x” representa el número de botes de arena y “y” de grava, completa la siguiente tabla y desarrolla lo que se pide en los incisos posteriores.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y				5		7.5		

a) Realiza la gráfica.



Actividad: 1

b) Si se extendiera la gráfica en todos los números reales, ¿cuál sería la pendiente y la ordenada en el origen?

c) Calcula la pendiente.

d) Escribe la ecuación en su forma pendiente-ordenada en el origen.

<table>
<tr><th colspan="7">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 1</td><td colspan="4">Producto: Ejercicios.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="7">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="4">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica los elementos, la gráfica y la ecuación de la recta.</td><td colspan="4">Traza la gráfica de la recta y calcula los elementos y ecuación de la misma.</td><td colspan="2">Muestra disposición al realizar la actividad.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td colspan="2" rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Desarrollo

Con lo aprendido en los bloques anteriores y en la asignatura de Matemáticas 1, se puede definir a la línea recta desde tres perspectivas:

1. Geométricamente, una recta es la distancia más corta entre dos puntos.
2. Gráficamente, se puede ver como un conjunto de puntos, uno detrás de otro, de tal manera que si se toman del lugar geométrico dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, la pendiente "m" siempre es la misma.
3. Analíticamente se representa como una ecuación de primer grado o lineal con dos variables de la forma:

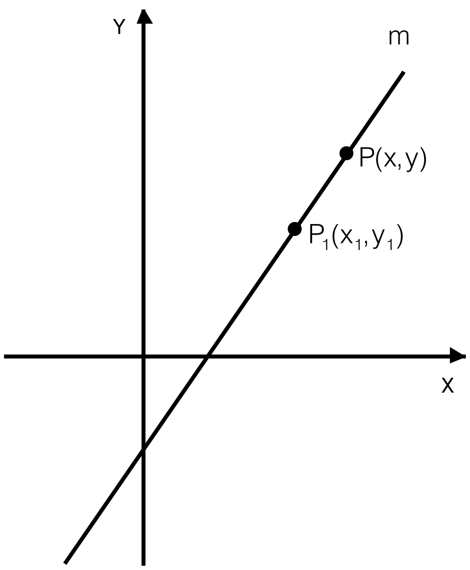
$$Ax + By + C = 0$$

Ya se han abordado las dos primeras perspectivas, ahora se requiere obtener las diferentes formas analíticas para utilizarlas en diversas aplicaciones, sobre todo, que ésta ofrece predecir con exactitud otros puntos que estén sobre la línea recta.

De acuerdo a los datos proporcionados se pueden utilizar diferentes formas de la ecuación, los cuales se desarrollan a continuación.

Forma punto-pendiente.

Si se tiene como información un punto cualquiera y la pendiente de una recta, se puede encontrar la expresión que se conoce como *forma punto-pendiente* y para ello se toma la siguiente gráfica.



La fórmula de pendiente conocidos dos puntos es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si se conoce el punto P_1 y la pendiente m, entonces un punto $P(x, y)$ cualquiera de la recta se puede relacionar con la pendiente y se expresa como:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Y despejando se obtiene la forma *punto-pendiente*.

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Directamente se puede utilizar esta forma y obtener la ecuación general de la recta.

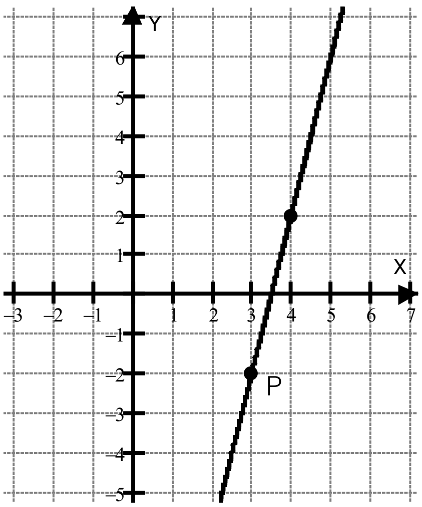
Ejemplo 1.
Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3, -2)$ y tiene como pendiente $m = 4$.

Con los datos proporcionados es recomendable graficar la recta, para visualizar el lugar geométrico. Para trazar la gráfica es necesario recordar que primero se ubica el punto en el plano cartesiano y posteriormente se toma la pendiente y se visualizan los cambios que hay en el numerador y el denominador; para este caso la pendiente 4 se convierte en fracción, colocando un 1 en el denominador y a partir del punto se camina 4 hacia arriba y uno a la derecha, y así se encuentra el siguiente punto con el que se traza la recta.

Para encontrar la ecuación de la recta, se sustituyen los valores del punto y la pendiente en la forma punto-pendiente y se realizan los cálculos necesarios para desarrollar la ecuación y presentarla en su forma general.

$P(3,-2)=(x_1,y_1)$

$$m=4=\frac{4}{1}\begin{matrix}\longrightarrow\\\longrightarrow\end{matrix}\frac{\Delta y}{\Delta x}\begin{matrix}\longrightarrow\\\longrightarrow\end{matrix}\frac{4\text{ unidades hacia arriba}}{1\text{ unidad a la derecha}}$$



$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-(-2)=4(x-3)$$
$$y+2=4x-12$$
$$y+2-4x+12=0$$
$$-4x+y+14=0$$

La ecuación permite comprobar si los puntos sobre la recta la satisfacen, así como también permite encontrar otros puntos que estén en ella.

Para comprobar que la ecuación es correcta, se sustituirá el punto encontrado a partir de la pendiente, en la ecuación.

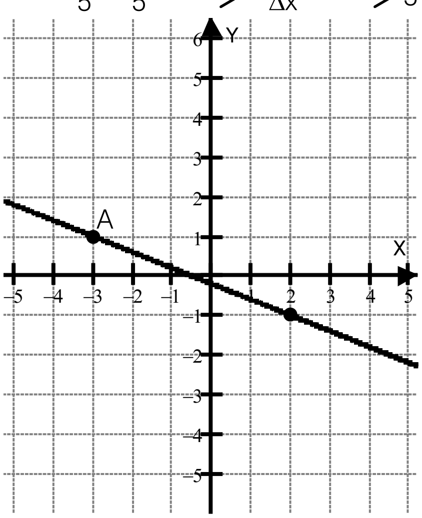
$$-4x+y+14=0$$
$$-4(4)+(2)+14=0$$
$$-16+2+14=0$$
$$0=0$$

Ejemplo 2.

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-3,1)$ y su pendiente es $m=-\frac{2}{5}$.

$A(-3,1)=(x_1,y_1)$

$$m=-\frac{2}{5}=\frac{-2}{5}\begin{matrix}\longrightarrow\\\longrightarrow\end{matrix}\frac{\Delta y}{\Delta x}\begin{matrix}\longrightarrow\\\longrightarrow\end{matrix}\frac{2\text{ unidades hacia abajo}}{5\text{ unidades a la derecha}}$$



$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-1=\frac{-2}{5}[x-(-3)]$$
$$5(y-1)=-2(x+3)$$
$$5y-5=-2x-6$$
$$2x+5y+1=0$$

Ejemplo 3.

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $B(-1,-5)$ y es paralela a la recta $4x-3y+1=0$.

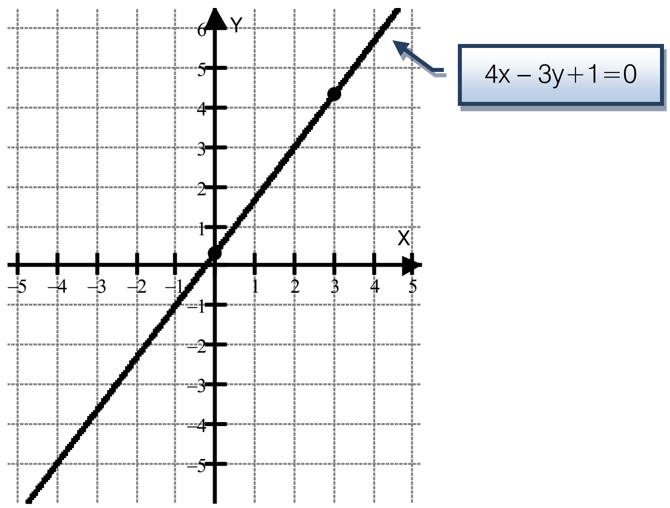
Para resolver este ejemplo, es necesario obtener la pendiente, para ello se debe considerar que es paralela a otra recta, por lo tanto, tiene la misma pendiente de la recta dada.

Para graficar la recta $4x-3y+1=0$ se debe encontrar su pendiente y la ordenada en el origen.

$$b=-\frac{C}{B} \qquad m=-\frac{A}{B}$$

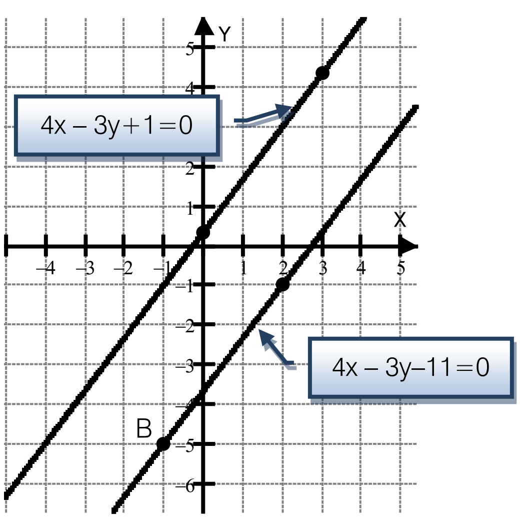
$$b=-\frac{1}{-3} \qquad m=-\frac{4}{-3}$$

$$b=\frac{1}{3} \qquad m=\frac{4}{3}$$



Esta misma pendiente se utiliza para encontrar la gráfica y la ecuación de la recta que pasa por $B(-1,-5)$

Por ello, la gráfica y la ecuación queda:



$$B(-1,-5)=(x_1,y_1)$$

$$m=\frac{4}{3}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-(-5)=\frac{4}{3}[x-(-1)]$$

$$3(y+5)=4(x+1)$$

$$3y+15=4x+4$$

$$0=4x-3y-11$$

Ejemplo 4.

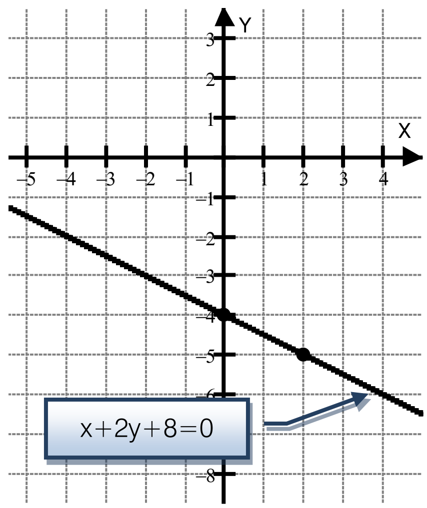
Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta $x + 2y + 8 = 0$

Primero se grafica la recta dada.

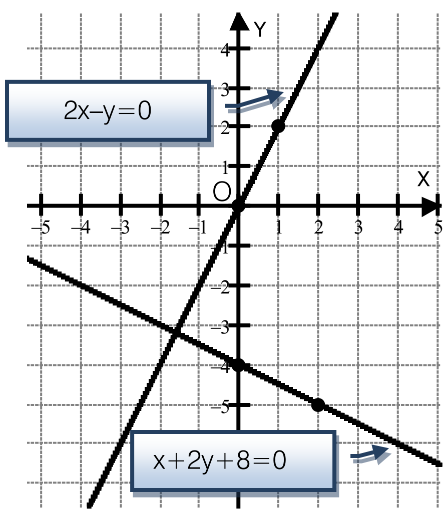
$$b = -\frac{C}{B} \qquad\qquad m = -\frac{A}{B}$$

$$b = -\frac{8}{2} \qquad\qquad m = -\frac{1}{2}$$

$$b = -4$$



La pendiente a utilizar debe ser recíproca y de signo contrario, porque son perpendiculares, así que la pendiente que se tomará para encontrar la recta que pasa por el origen es $m = 2$.



$O(0.0) = (x_1, y_1)$

$m = 2$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (0) = 2(x - 0)$$
$$y = 2x$$
$$0 = 2x - y$$

Dentro de la forma *punto-pendiente* está el caso de *pendiente-ordenada* en el origen, como se muestra a continuación:

La ordenada en el origen genera el punto $(0.b) = (x_1, y_1)$ y la pendiente es m.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - b = m(x - 0)$$
$$y = mx + b$$

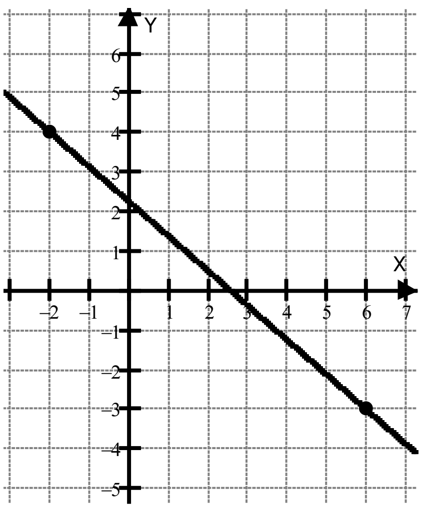
Si se conocen dos puntos por los que pasa la recta y se desea encontrar la ecuación que la representa, primero se debe obtener la pendiente y posteriormente tomar uno de los puntos para utilizar la forma punto-pendiente.

Ejemplo 5.
Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2,4)$ y $B(6,-3)$.
La gráfica no tiene la menor complejidad, ya que se grafican los puntos y directamente se traza la recta.

Uno de los procedimientos para encontrar la ecuación consiste en obtener primero.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{-3-4}{6+2}$$
$$m = \frac{-7}{8}$$

Se puede utilizar cualquiera de los dos puntos para encontrar la ecuación, en este caso se utilizara el punto A.



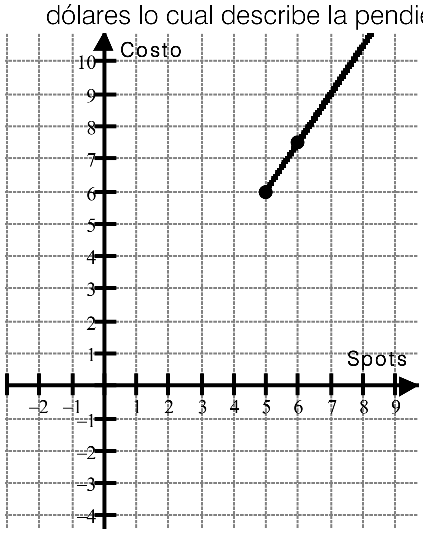
$A(-2,4) = (x_1, y_1)$

$m = \frac{-7}{8}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4 = \frac{-7}{8}(x - (-2))$$
$$8(y-4) = -7(x+2)$$
$$8y - 32 = -7x - 14$$
$$7x + 8y - 18 = 0$$

Ejemplo 6.
Una radiodifusora cobra 6 dólares por transmitir los primeros 5 spots comerciales y por cada spot adicional cobra 1.5 dólares.

a) Construir la ecuación que describe el costo de los spots.
Para encontrar la ecuación se toma el punto $(5,6)$, el cual describe en su primera coordenada el número de spots, y en su segunda coordenada el costo de los spots. También por cada spot adicional se cobra 1.5 dólares lo cual describe la pendiente de la ecuación, como se observa en la gráfica.



En ésta se observa cómo coincide la información dada, y se le puede asignar la variable “y” al costo de los spots, y la variable “x” al número de spots.

$A(5,6) = (x_1, y_1)$

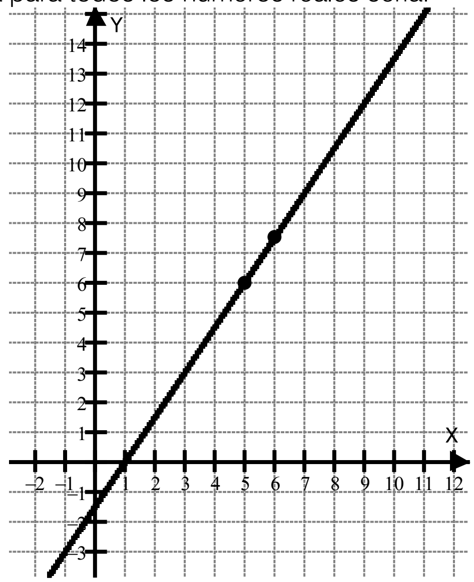
$m = 1.5$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 6 = 1.5(x - 5)$$
$$y - 6 = 1.5x - 7.5$$
$$0 = 1.5x - y - 1.5$$

Se puede reescribir la ecuación para expresarla sin decimales, multiplicándola por 2.

$$3x - 2y - 3 = 0$$

b) Trazar la gráfica correspondiente.
La gráfica de la ecuación obtenida para todos los números reales sería.



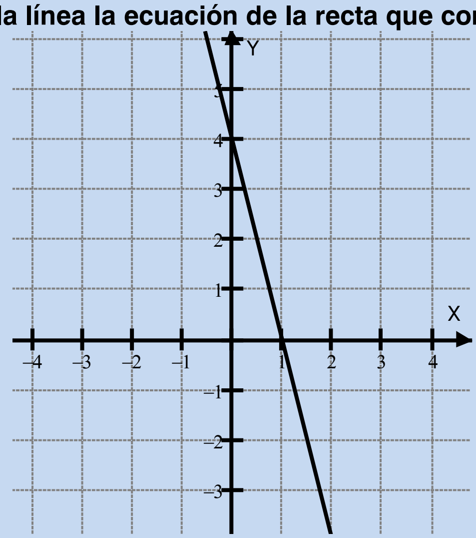
c) Si se solicitan 10 spots a la radiodifusora, ¿cuánto se tendrá que pagar?
Es decir, para x=10, cuanto equivaldría en "y".
Para ello se toma la ecuación y se sustituye el valor de 10 en "x", posteriormente se despeja "y".

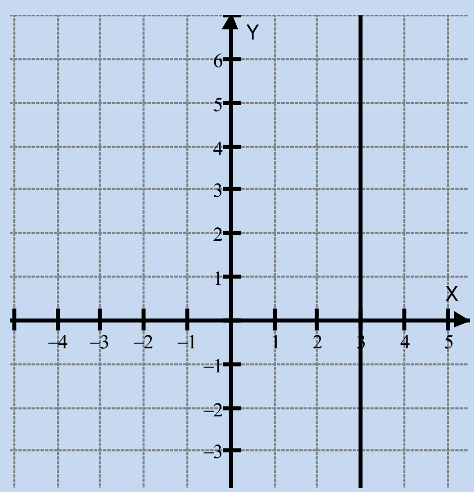
$$3x - 2y - 3 = 0$$
$$3(10) - 2y - 3 = 0$$
$$-2y = 3 - 30$$
$$y = \frac{-27}{-2}$$
$$y = 13.5$$

Pagaría 13.5 dólares por los 10 spots.

Actividad: 2

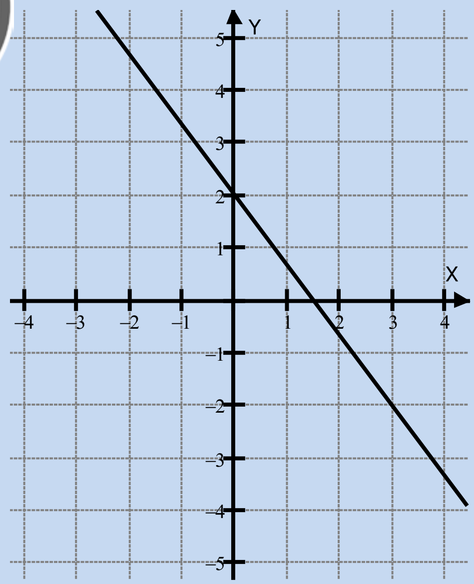
Escribe en la línea la ecuación de la recta que corresponda.

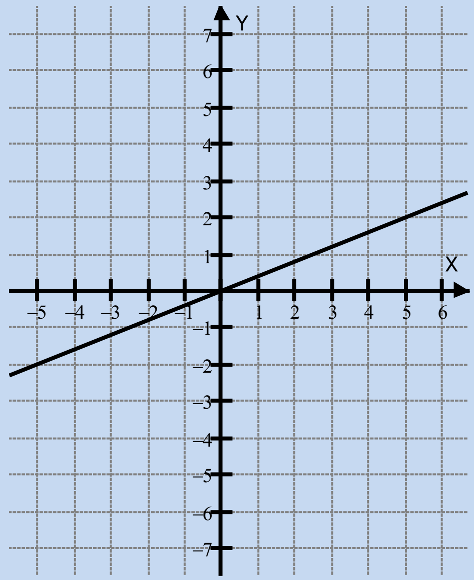


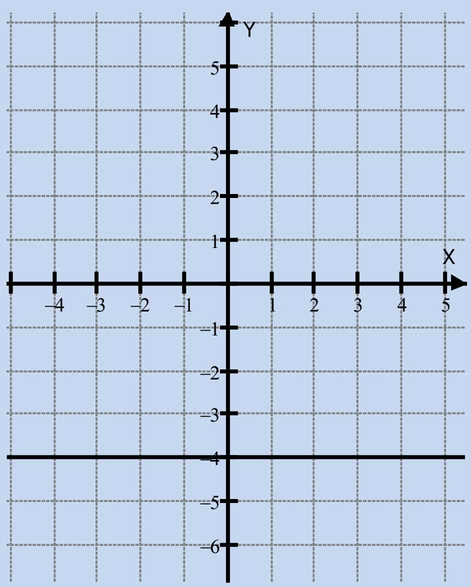


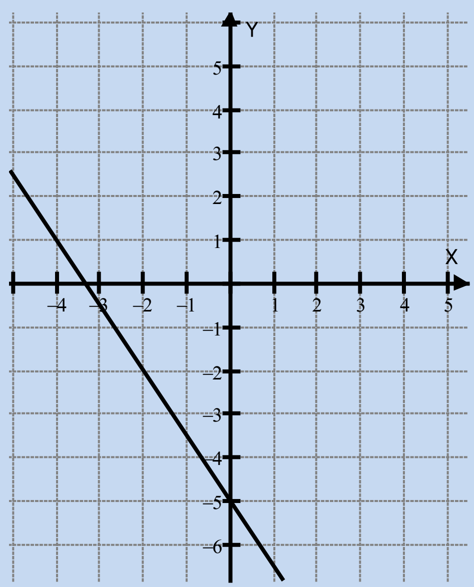
______________________ ______________________

Actividad: 2 (continuación)







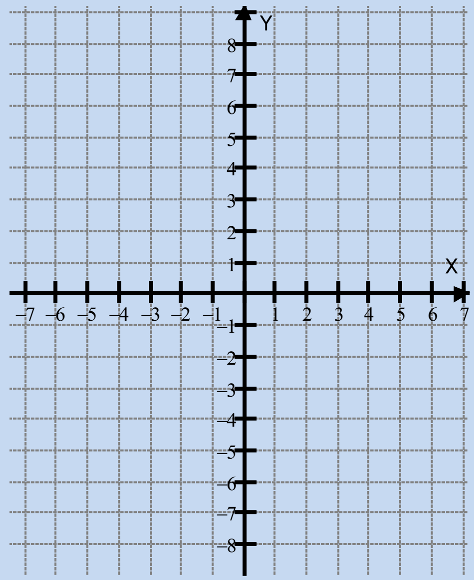


<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 2</td><td colspan="3">Producto: Interpretación de gráficas.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Ubica los elementos necesarios en la gráfica de una recta, para obtener su ecuación.</td><td colspan="3">Construye la ecuación de la recta a partir de su gráfica.</td><td colspan="2">Aprecia la graficación como una herramienta que proporciona la ecuación de una recta.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

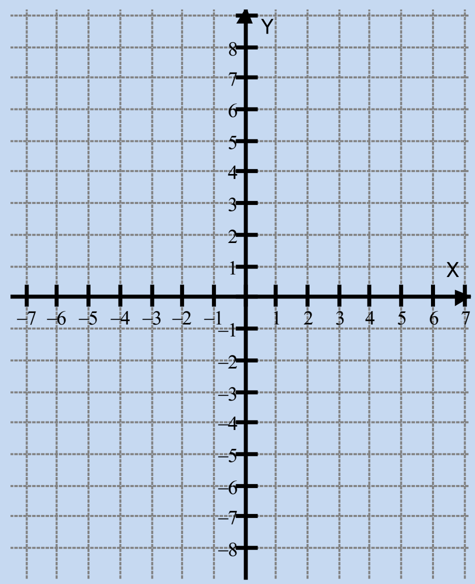
Actividad: 3

Grafica y encuentra la ecuación de la recta que cumple con lo siguiente:

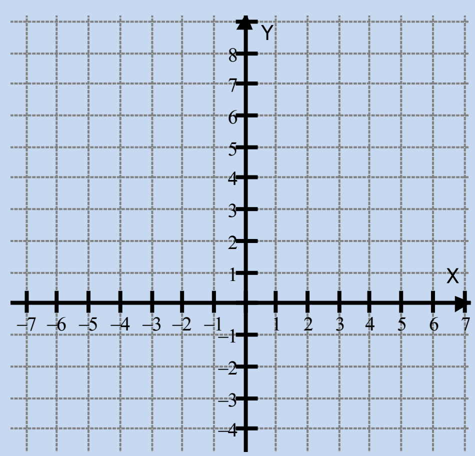
1. Pasa por (4,1) y su ángulo de inclinación es de 45º.



2. Pasa por (3,–2) y m=4/5.

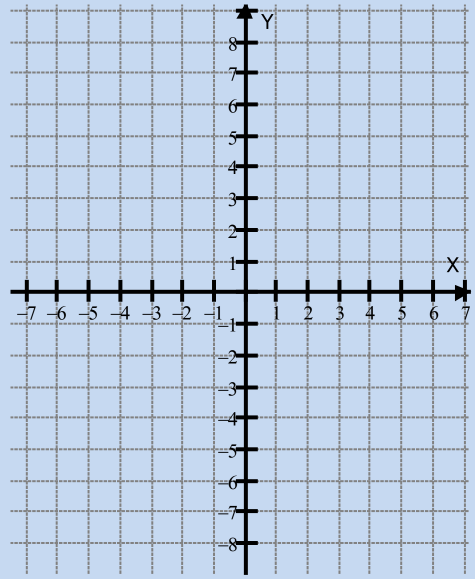


3. Pasa por (–5,6) y m=–3/4.

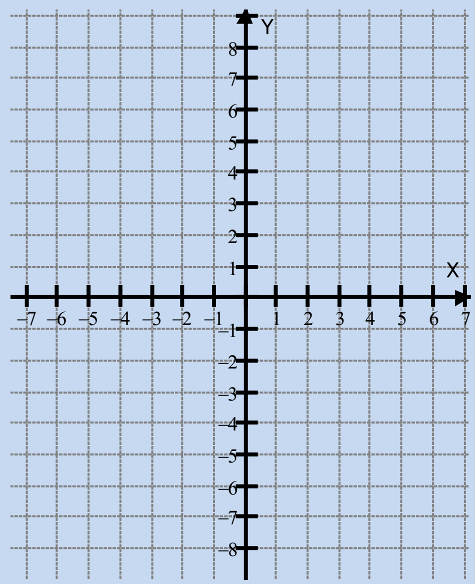


Actividad: 3 (continuación)

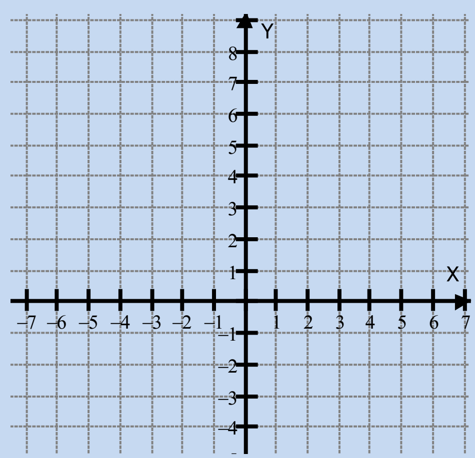
4. Pasa por (1,3) y su pendiente es cero.



5. Pasa por (4,2) y no tiene pendiente.

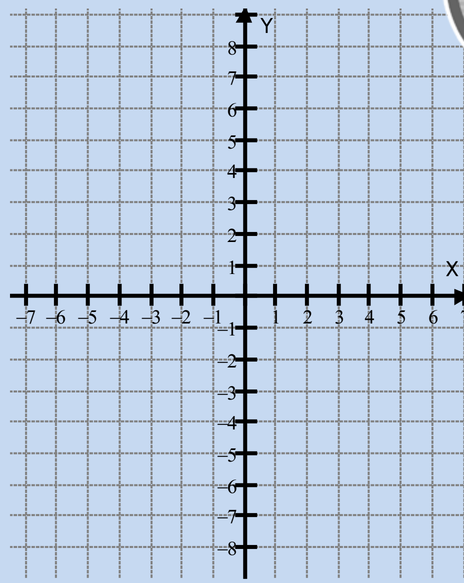


6. Pasa por (2,–3) y (5,4).

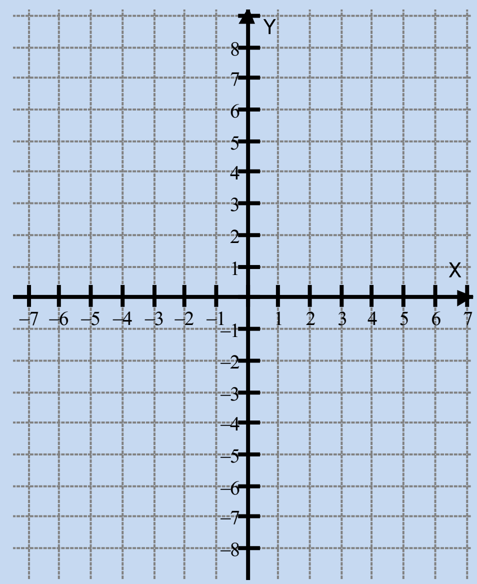


Actividad: 3 (continuación)

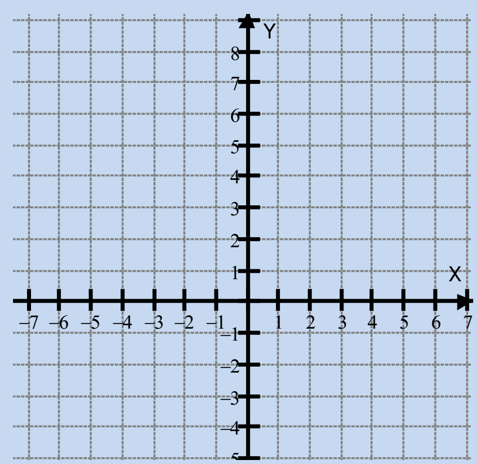
7. Pasa por (–2,1) y (4,1).



8. Pasa por (2,–3) y (2,1).

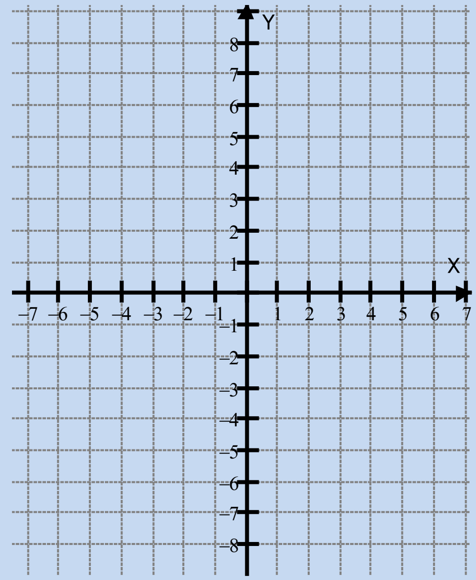


9. Es mediatriz del segmento de extremos (–5,–1) y (3,4).



Actividad: 3 (continuación)

10. Es paralela a $2x - 3y + 12 = 0$ y pasa por $(5,-2)$.



Evaluación					
Actividad: 3	Producto: Ejercicios.			Puntaje:	
Saberes					
Conceptual	Procedimental			Actitudinal	
Reconoce las condiciones de la recta para encontrar la ecuación que la describe.	Calcula la ecuación de la recta a partir de ciertas condiciones y traza su gráfica.			Expresa sus dudas y rectifica sus errores, en la construcción de la ecuación de la recta y su gráfica.	
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente	

Forma simétrica.

Esta forma también es un caso particular de la forma *punto-pendiente,* en la cual se dejan explícitas las intersecciones con los ejes coordenados.

Las intersecciones con los ejes son las que se conocen como abscisa y ordenada en el origen.

La abscisa en el origen es $(a, 0)$.
La ordenada en el origen es $(0, b)$.
La pendiente obtenida es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{b - 0}{0 - a} = -\frac{b}{a}$$

Se sustituyen los puntos y la pendiente en la forma punto-pendiente.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - b = -\frac{b}{a}(x - 0)$$

$$a(y - b) = -bx$$

$$ay - ab = -bx$$

$$bx + ay = ab$$

Ahora se divide entre "ab" a ambos lados de la ecuación, sólo si $a, b \neq 0$

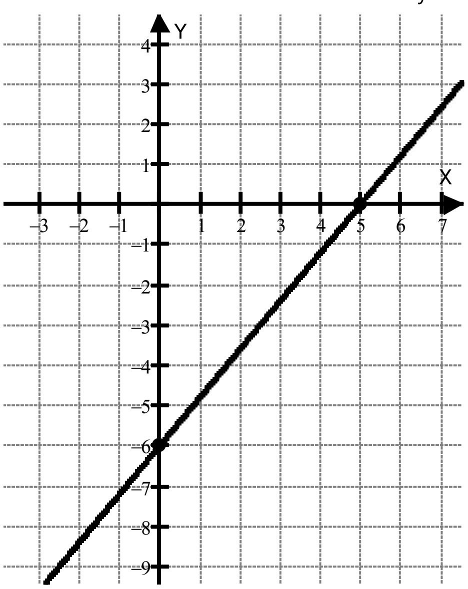
$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab}$$

.

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Ejemplo 1.

Encontrar la ecuación de la recta cuya abscisa en el origen es 5 y cuya ordenada en el origen es .– 6.



$a = 5$

$b = -6$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-6} = 1$$

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{6} = 1$$

La forma anterior es la simétrica, y de ella se puede generar la ecuación general multiplicando por el mínimo común múltiplo, como se muestra a continuación.

$$\left(\frac{x}{5} - \frac{y}{6} = 1\right)(30)$$

$$\frac{30x}{5} - \frac{30y}{6} = 30$$

$$6x - 5y = 30$$

$$6x - 5y - 30 = 0$$

Ejemplo 2.

Encontrar la ecuación de la recta si la intersección con el eje X es –2, y la intersección con el eje Y es 8.

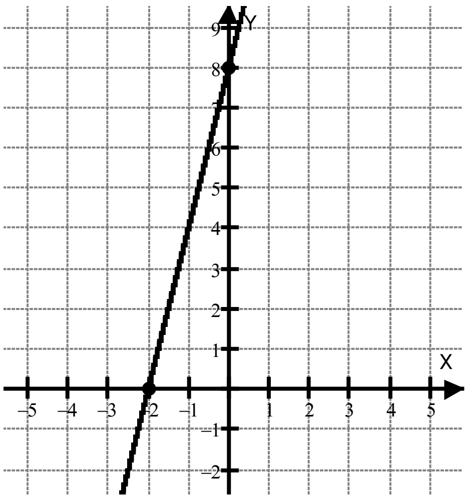
$a = -2$

$b = 8$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{8} = 1$$

$$-\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1$$



Multiplicando por el mínimo común múltiplo a ambos lados, se tiene:

$$\left(-\frac{x}{2}+\frac{y}{8}=1\right)(8)$$
$$-\frac{8x}{2}+\frac{8y}{8}=8$$
$$-4x+y=8$$
$$-4x+y-8=0$$

Dada la ecuación, uno de los usos más frecuentes de la forma simétrica consiste en encontrar los puntos donde la recta interseca a los ejes, como se muestra en el siguiente ejemplo.

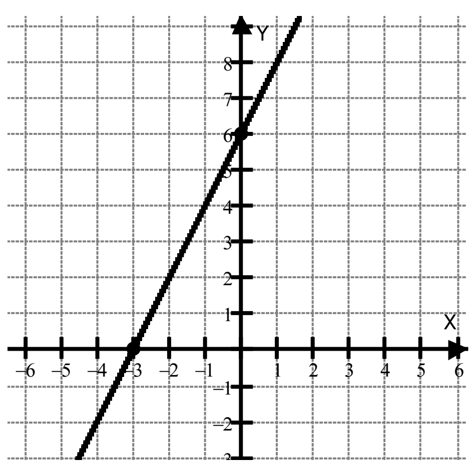
Ejemplo 3.
Encontrar los puntos de intersección de los ejes coordenados de la recta $2x-y+6=0$.
En este caso es conveniente empezar por encontrar la forma simétrica, ya que una vez obtenida se puede trazar la gráfica.

Se toma la ecuación y se va moldeando hacia la forma simétrica, primero hay que enviar el término independiente (C) al segundo miembro de la ecuación, es decir, al lado derecho de la misma.

$$2x-y=-6$$
Ahora se tiene que dividir la ecuación entre -6 para hacer el lado derecho igual a 1.

$$(2x-y=-6)\div(-6)$$
$$\frac{2x}{-6}-\frac{y}{-6}=\frac{-6}{-6}$$
Y se expresa de diferente manera:

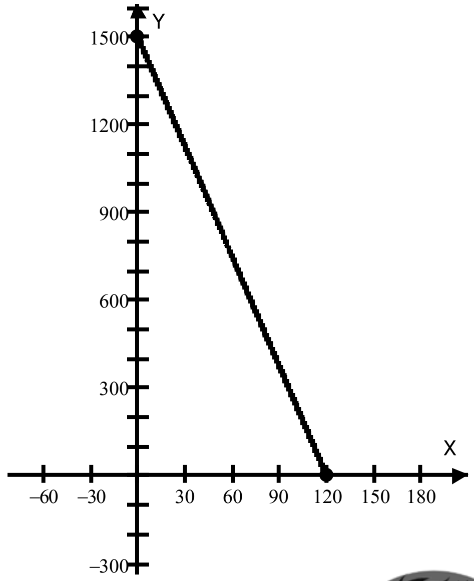
$$\frac{x}{\frac{-6}{2}}-\frac{y}{\frac{-6}{1}}=1$$
$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{6}=1$$
La intersección con el eje X es -3 y con el eje Y es 6; la gráfica queda de la siguiente manera:



Ejemplo 4.
Santiago abrió una cuenta de ahorro y no ha hecho ningún depósito desde su apertura; la ecuación $25x+2y-3000=0$, proporciona las comisiones que se descuentan a su capital por manejo de cuenta, entre otros aspectos, donde "y" es el capital en pesos, y "x" el tiempo transcurrido en meses. Calcular la cantidad de dinero que Santiago depositó para abrir la cuenta y el tiempo que tardará para perder su capital por completo.

Lo que se pide en este problema son las intersecciones con los ejes, en el caso de calcular el depósito inicial sería la ordenada en el origen y el tiempo que transcurre para que su capital se pierda es la abscisa en el origen, así que se resolvería encontrando la ecuación en su forma simétrica, como se muestra a continuación.

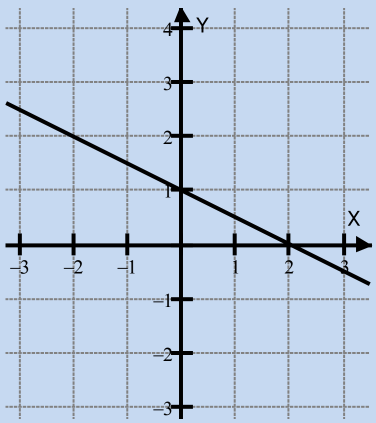
$$25x + 2y - 3000 = 0$$
$$25x + 2y = 3000$$
$$\frac{25x}{3000} + \frac{2y}{3000} = \frac{3000}{3000}$$
$$\frac{x}{120} + \frac{y}{1500} = 1$$

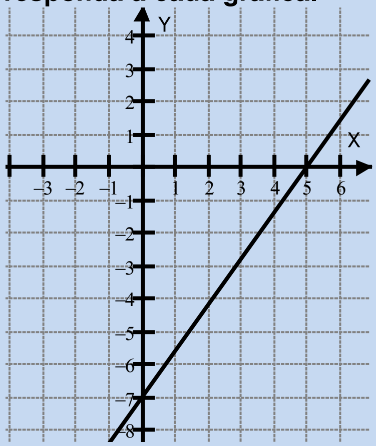


La abscisa en el origen es $a = 120$ y la ordenada en el origen es $b = 1500$.
Lo anterior significa que en 120 meses (10 años) la cantidad que depositó inicialmente ($1500.00) la perderá por completo.

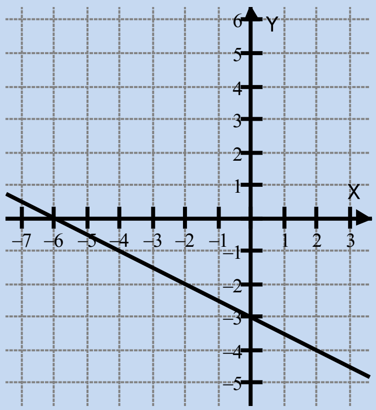
Actividad: 4

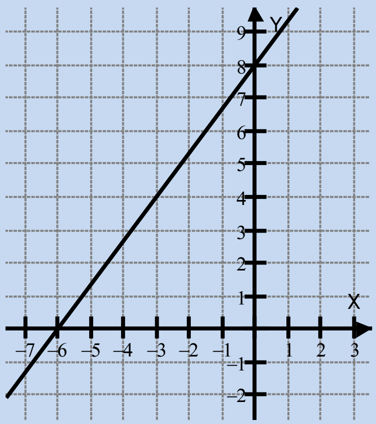
Escribe en la línea la forma simétrica de la recta que corresponda a cada gráfica.





______________________ ______________________





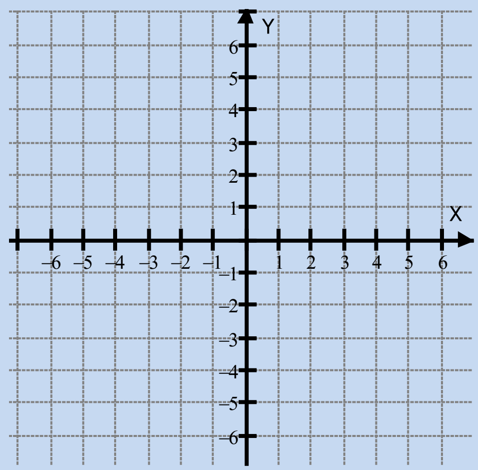
______________________ ______________________

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 4</td><td colspan="3">Producto: Interpretación de gráficas.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica los parámetros a y b de la gráfica de una recta.</td><td colspan="3">Construye la forma simétrica de la recta a partir de la gráfica.</td><td colspan="2">Aprecia la graficación como una herramienta que proporciona la ecuación simétrica de la recta..</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

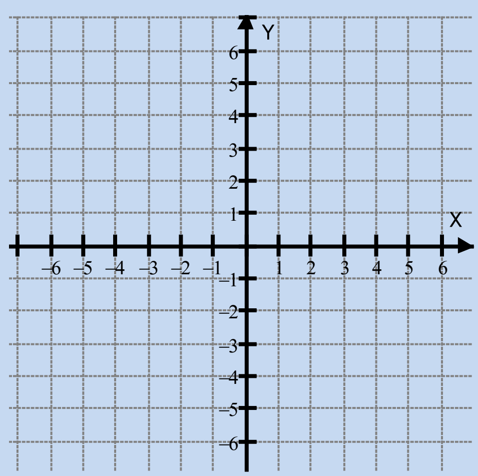
Actividad: 5

Expresa la forma simétrica y la gráfica de la recta que cumple con cada una de las condiciones siguientes:

1. Interseca a los ejes X y Y en los puntos 5 y –2, respectivamente.

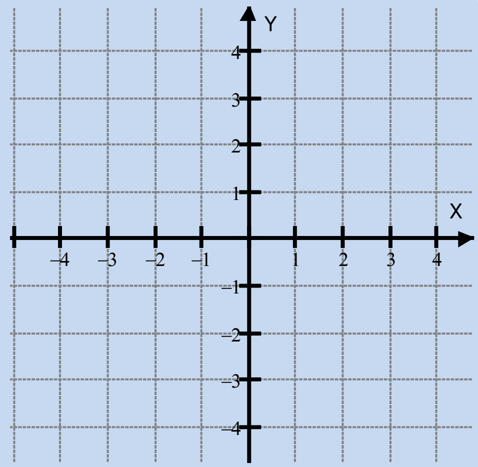


2. La abscisa en el origen es –1 y su ordenada en el origen es 3.

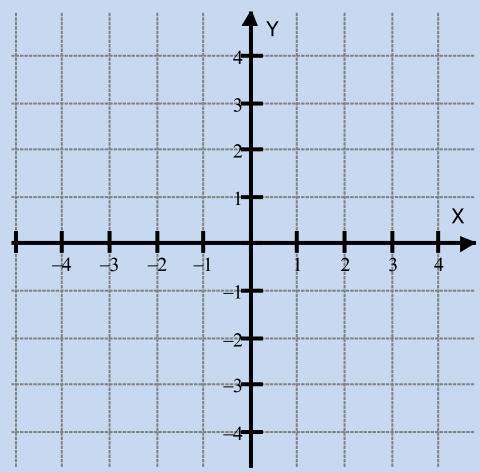


Actividad: 5 (continuación)

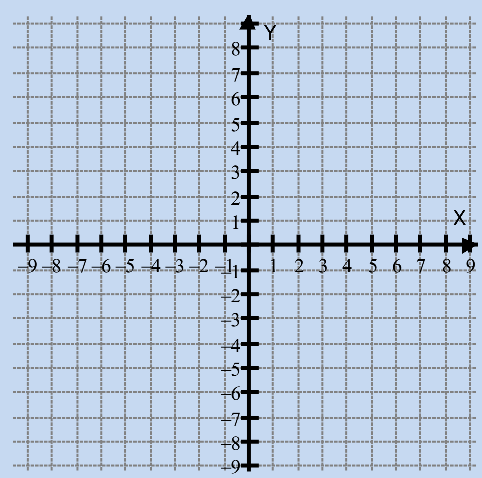
3. El corte con el eje X es 1/2, y con el eje Y es 5/2.



4. Pasa por los puntos (–3/4, 0) y (0, 15/7).

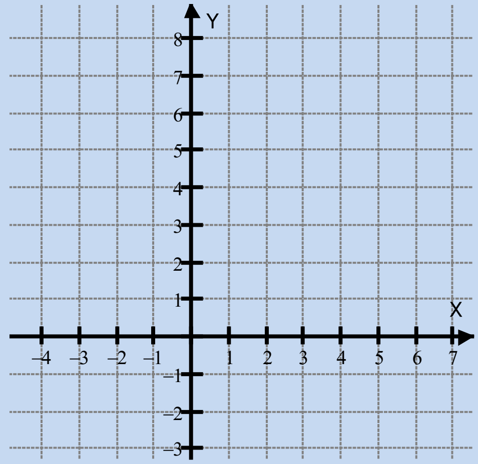


5. Pasa por el punto (–3, –8) y es paralela a la recta que interseca a los ejes X e Y en 2 y 6, respectivamente.



Actividad: 5 (continuación)

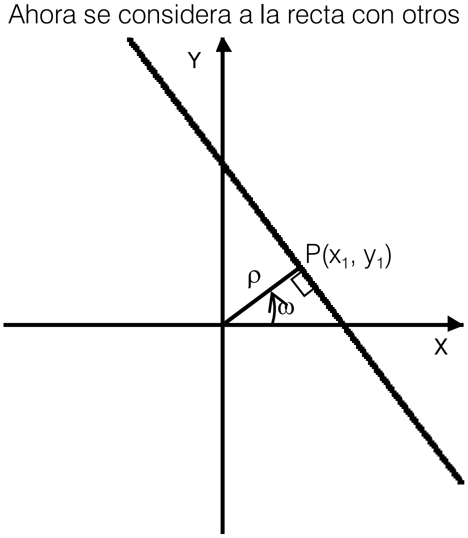
6. Pasa por el punto (2, 2) y es perpendicular a la recta cuya abscisa en el origen es 7 y cuya ordenada en el origen es –4.



Evaluación						
Actividad: 5	Producto: Ejercicios.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Reconoce las condiciones de la recta para encontrar la forma simétrica.	Calcula la forma simétrica de la recta a partir de ciertas condiciones y traza su gráfica.			Expresa sus dudas y rectifica sus errores, en la construcción de la ecuación de la recta y su gráfica.		
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

Forma normal de la ecuación de la recta.

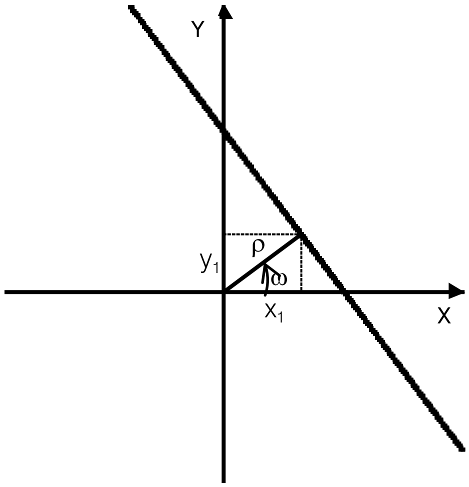
Ahora se considera a la recta con otros elementos como se muestra en la siguiente gráfica.

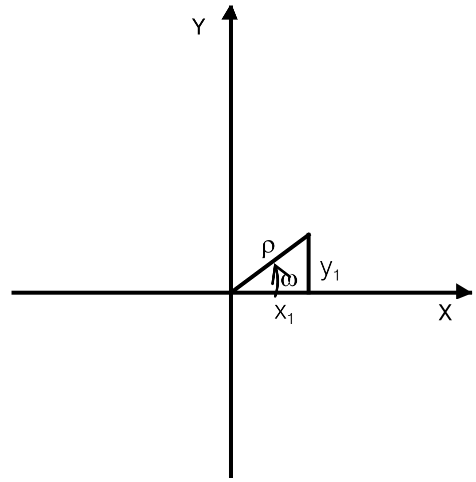


La recta que se observa se conoce como *la recta normal*, ésta es perpendicular al segmento que está anclado en el origen y que la toca en el punto $P(x_1, y_1)$, dicho segmento tiene longitud ρ y ángulo de inclinación ω.

El rango del ángulo ω es de 0 a 360º.

Ahora se realizarán los cálculos necesarios para llegar a la forma normal de la recta, auxiliándose de las funciones trigonométricas, para ello, se ubica el triángulo rectángulo que se forma con las coordenadas del punto y el segmento perpendicular, como se muestra a continuación.





Utilizando funciones trigonométricas, se tiene que:

$$\text{Cos}\,\omega = \frac{x_1}{\rho}$$

$$\text{Sen}\,\omega = \frac{y_1}{\rho}$$

Despejando las coordenadas, se tiene:

$$x_1 = \rho\text{Cos}\,\omega \qquad y_1 = \rho\text{Sen}\,\omega$$

A la pendiente de la recta se le nombra m_n, y a la pendiente del segmento m_ρ.

Utilizando la fórmula de pendiente dados dos puntos, la pendiente del segmento es:

$$m_\rho = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \frac{y_1}{x_1}$$

Sustituyendo los valores de las coordenadas del punto se obtiene como pendiente del segmento:

$$m_\rho = \frac{\rho\text{Sen}\omega}{\rho\text{Cos}\omega}$$

$$m_\rho = \frac{\text{Sen}\omega}{\text{Cos}\omega}$$

Como la recta y el segmento son perpendiculares, la pendiente de la recta queda de la siguiente manera:

$$m_n = -\frac{1}{m_\rho}$$

$$m_n = -\frac{1}{\frac{\text{Sen}\omega}{\text{Cos}\omega}}$$

$$m_n = -\frac{\text{Cos}\omega}{\text{Sen}\omega}$$

Entonces, tomando en cuenta las coordenadas del punto y la pendiente de la recta, la ecuación quedaría:

$$x_1 = \rho \operatorname{Cos}\omega$$
$$y_1 = \rho \operatorname{Sen}\omega$$
$$m_n = -\frac{\operatorname{Cos}\omega}{\operatorname{Sen}\omega}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - \rho\operatorname{Sen}\omega = -\frac{\operatorname{Cos}\omega}{\operatorname{Sen}\omega}(x - \rho\operatorname{Cos}\omega)$$
$$\operatorname{Sen}\omega(y - \rho\operatorname{Sen}\omega) = -\operatorname{Cos}\omega(x - \rho\operatorname{Cos}\omega)$$
$$y\operatorname{Sen}\omega - \rho\operatorname{Sen}^2\omega = -x\operatorname{Cos}\omega + \rho\operatorname{Cos}^2\omega$$
$$x\operatorname{Cos}\omega + y\operatorname{Sen}\omega - \rho\operatorname{Sen}^2\omega - \rho\operatorname{Cos}^2\omega = 0$$
$$x\operatorname{Cos}\omega + y\operatorname{Sen}\omega - \rho\left(\operatorname{Sen}^2\omega + \operatorname{Cos}^2\omega\right) = 0$$

Como $\operatorname{Sen}^2\omega + \operatorname{Cos}^2\omega = 1$ entonces la *forma normal* de la recta se expresa de la siguiente forma:

$$\boxed{x\operatorname{Cos}\omega + y\operatorname{Sen}\omega - \rho = 0}$$

Esta fórmula sirve para obtener la ecuación de la recta, dado el segmento que proporciona la distancia entre ella y el origen, así como el ángulo de inclinación del mismo.

Ahora se requiere transformar de la *ecuación general* a la *forma normal* de la ecuación de la recta, para ello se comparan los coeficientes de ambas formas.

$$Ax + By + C = 0$$
$$x\operatorname{Cos}\omega + y\operatorname{Sen}\omega - \rho = 0$$

Si ambas corresponden a la misma recta, sus coeficientes correspondientes deben ser proporcionales, por lo tanto:

$$\operatorname{Cos}\omega = kA$$
$$\operatorname{Sen}\omega = kB$$
$$-\rho = kC$$

Elevando al cuadrado y sumando las dos primeras ecuaciones se tiene:

$$\operatorname{Cos}^2\omega + \operatorname{Sen}^2\omega = (kA)^2 + (kB)^2$$
$$1 = k^2\left(A^2 + B^2\right)$$

Despejando k se obtiene:

$$k^2 = \frac{1}{A^2 + B^2}$$
$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad A^2 + B^2 \neq 0$$

Sustituyendo el valor de k se obtiene la forma normal a partir de la ecuación general.

$$x\operatorname{Cos}\omega + y\operatorname{Sen}\omega - \rho = 0$$
$$kAx + kBy - kC = 0$$

$$\boxed{\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0}$$

El signo del radical se elige de la siguiente forma:

a) Si $C \neq 0$ el signo es contrario al de C.
b) Si $C = 0$ y $B \neq 0$, el signo es igual al de B.
c) Si $C = 0$ y $B = 0$, el signo es igual al de A.

Ejemplo 1.

Encuentra la forma normal de la ecuación $3x + 4y - 16 = 0$.

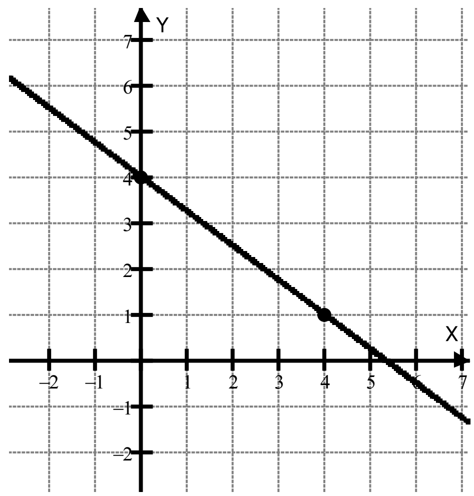
Es conveniente graficar primero para visualizar la recta.

$$m = -\frac{A}{B} \qquad b = -\frac{C}{B}$$

$$m = -\frac{3}{4} \qquad b = -\frac{-16}{4}$$

$$b = 4$$

Entonces, a partir de la ordenada en el origen 2 y la pendiente, se traza la gráfica.



Para encontrar la forma normal, es necesario identificar los coeficientes A, B y C de la ecuación general y sustituirla en la ecuación correspondiente.

$$3x + 4y - 16 = 0$$

$A = 3$

$B = 4$

$C = -16$

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

$$\frac{3}{\pm\sqrt{3^2 + 4^2}}x + \frac{4}{\pm\sqrt{3^2 + 4^2}}y + \frac{-16}{\pm\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0$$

Como el signo de C es negativo, entonces se elige el signo positivo para el radical.

$$\frac{3}{\sqrt{9 + 16}}x + \frac{4}{\sqrt{9 + 16}}y + \frac{-16}{\sqrt{9 + 16}} = 0$$

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{-16}{5} = 0$$

Ejemplo 2.

Encuentra la distancia que hay entre la recta $5x + 6y - 30 = 0$ y el origen.

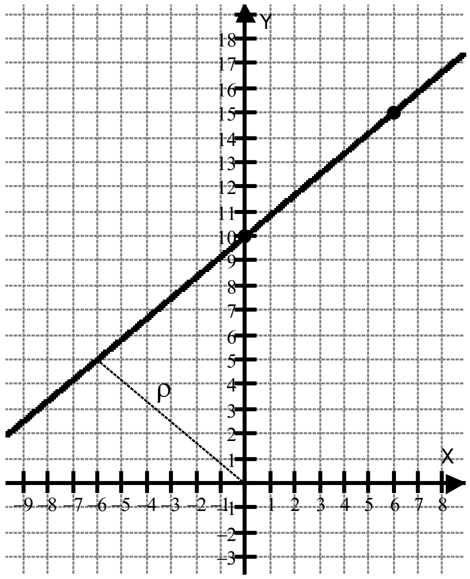
Primero se graficará la ecuación para tener una idea de lo que se anda buscando.

$$5x + 6y - 30 = 0$$

$$m = -\frac{A}{B} \qquad b = -\frac{C}{B}$$

$$m = -\frac{5}{6} \qquad b = -\frac{-30}{6}$$

$$b = 5$$



La distancia que se desea encontrar es la longitud ρ, esto se puede hacer con la fórmula $-\rho = kC$, donde $k = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$, por lo tanto:

$$\rho = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Debes recordar que el signo del radical es contrario al del de C

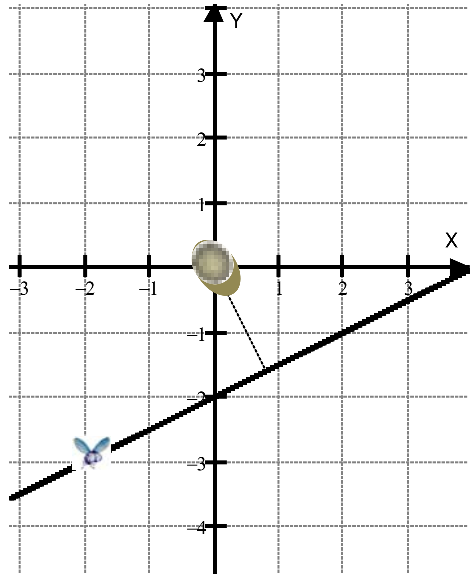
$A = 5$
$B = 6$
$C = -30$

$$\rho = \frac{-(-30)}{\pm\sqrt{(5)^2 + (6)^2}}$$

$$\rho = \frac{30}{\sqrt{61}}$$

Ejemplo 3.
Una mosca vuela por una habitación y Martín espera a que esté a su alcance para matarla con periódico. La mosca lleva una trayectoria descrita por la ecuación. $x - 2y - 4 = 0$; si el brazo de Martín junto con el periódico mide 1.15 m, ¿podrá pegarle a la mosca?

Si se ubica a Martín en el origen y se grafica la trayectoria de la mosca, se tiene la siguiente gráfica:



Deberá calcularse la distancia mínima entre Martín y la mosca; si ésta es menor que su brazo y el periódico, entonces Martín tendrá la posibilidad de matar a la mosca.

La distancia que se desea calcular de la siguiente forma:

$$\rho = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$A = 1$

$B = -2$

$C = -4$

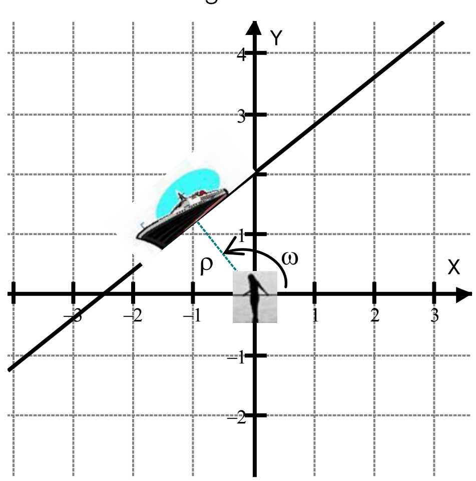
$$\rho = \frac{-(-4)}{\pm\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}}$$

$$\rho = \frac{4}{\sqrt{5}} = 1.78$$

Martín no podrá alcanzar a la mosca, ya que su brazo junto con el periódico mide 1.15 m y la distancia de la mosca a Martín es de 1.78 m.

Ejemplo 4.

Un barco lleva una trayectoria representada por la ecuación de la recta $4x - 5y + 10 = 0$ (medida en Km), si Angelina lo observa desde el muelle (considera que el muelle está en el origen), ¿cuál es la distancia mínima entre el barco y Angelina? ¿Cuál es el ángulo de inclinación del segmento más corto entre el barco y ella?



En el dibujo se observa que el ángulo que se desea encontrar es ω, y la distancia es ρ.
Las fórmulas que se usarán son:

$$\text{Cos}\omega = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \rho = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$A = 4$
$B = -5$
$C = 10$

$$\text{Cos}\omega = \frac{4}{-\sqrt{(4)^2 + (-5)^2}} \qquad \rho = \frac{-10}{-\sqrt{(4)^2 + (-5)^2}}$$

$$\text{Cos}\omega = -\frac{4}{\sqrt{41}} \qquad \rho = \frac{10}{\sqrt{41}}$$

$$\omega = \text{Cos}^{-1}\left(-\frac{4}{\sqrt{41}}\right) \qquad \rho = 1.56$$

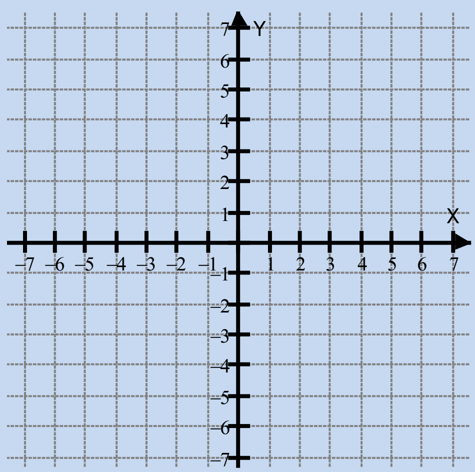
$$\omega = 128.66^{\circ}$$

La distancia más corta entre el barco y Angelina es 1.56 Km y el ángulo de inclinación del segmento más corto entre ellos es de 128.66º.

Actividad: 6

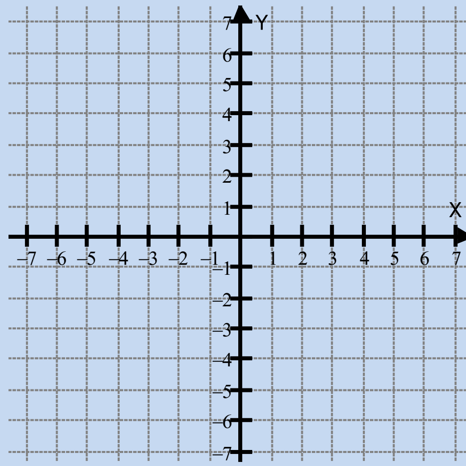
Desarrolla lo que se pide:

1. Una recta es tangente a una circunferencia con centro en el origen y radio igual a 5; si el punto de tangencia es (4,3), determina la ecuación de la recta tangente en su forma normal.

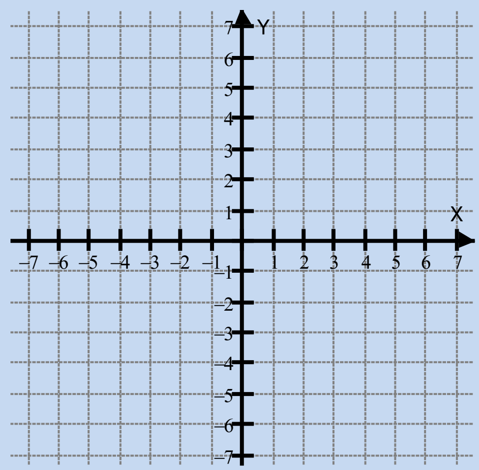


Actividad: 6 (continuación)

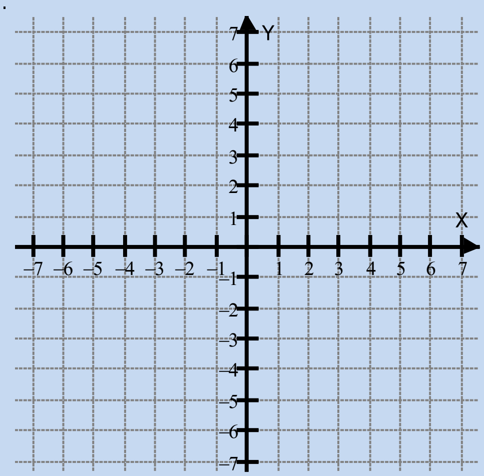
2. Encuentra la forma normal de la ecuación de la recta que es paralela a la recta $3x - y + 6 = 0$ y pasa por el punto (6, –4).



3. Encuentra la forma normal de la ecuación de la recta que es paralela a la recta $x + 4y + 16 = 0$ y pasa por el punto (3, 5).

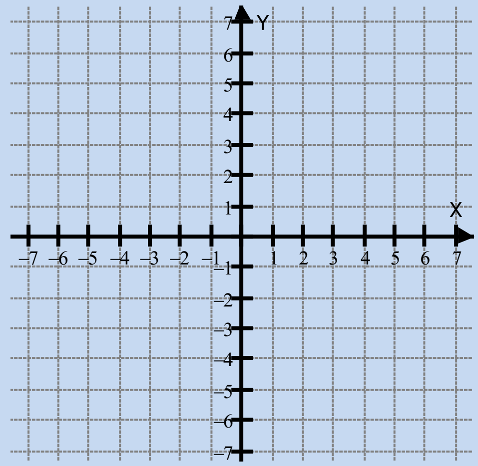


4. Encuentra la forma normal de la ecuación de la recta cuya distancia mínima al origen es de $\sqrt{50}$ y el ángulo que corresponde al segmento de dicha distancia es 45º.

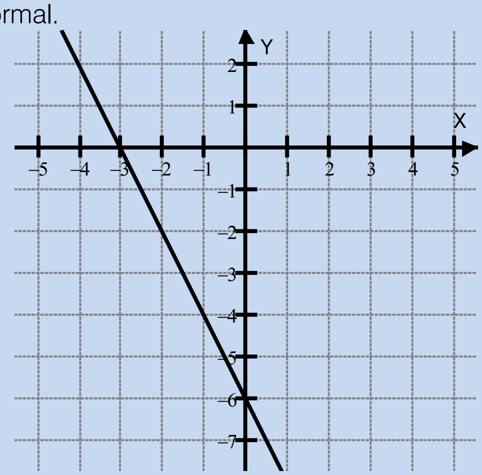


Actividad: 6 (continuación)

5. Encuentra el ángulo de inclinación y la longitud del segmento perpendicular que une al origen con la recta cuya ecuación es $5x - 3y - 34 = 0$.



6. Representa la recta que se observa en la gráfica en su forma normal.



Evaluación					
Actividad: 6	Producto: Ejercicios.			Puntaje:	
Saberes					
Conceptual	Procedimental			Actitudinal	
Identifica las condiciones de la recta para encontrar su forma normal.	A partir de ciertas condiciones, construye la forma normal de la recta y traza su gráfica.			Visualiza la importancia de conocer la forma normal de la recta para obtener otros datos relacionados con la misma.	
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente	

Sitios Web recomendados:

Entra a estos sitios para que refuerces tus conocimientos. En el primer sitio encontrarás graficadores y en el segundo hay varios ejercicios que puedes realizar y comprobar.
http://nlvm.usu.edu/es/nav/topic_t_2.html
http://www.ematematicas.net/ecrectaplano.php?a=5&pot=5

Conversión de la ecuación general de la recta a sus distintas formas.

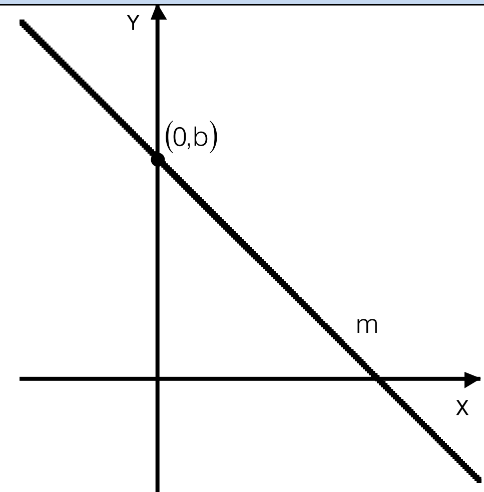
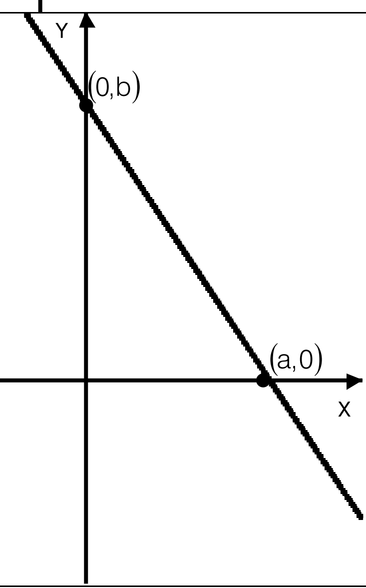
En el curso de Matemáticas 1 y en bloques anteriores se ha mencionado *la forma general de la recta*, la cual es:

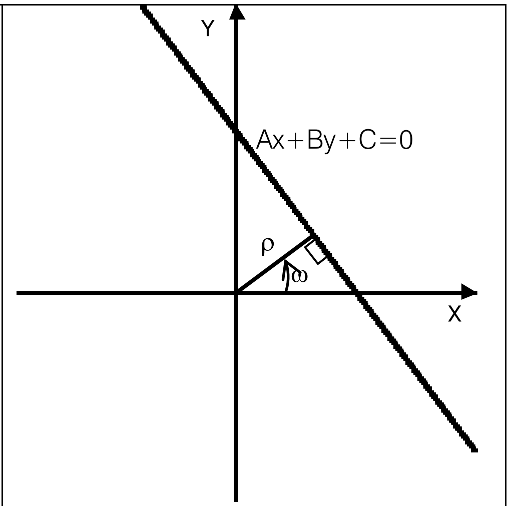
$$Ax + By + C = 0$$

En todas las formas que se han manejado de la recta, se ha obtenido su forma general.

Cuando se conoce la forma general de la recta, ésta puede ser modificada de la misma forma que las anteriores y obtener así tanto los elementos de la recta como su gráfica.

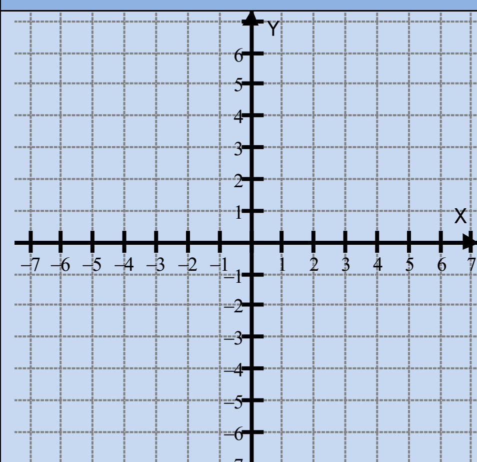
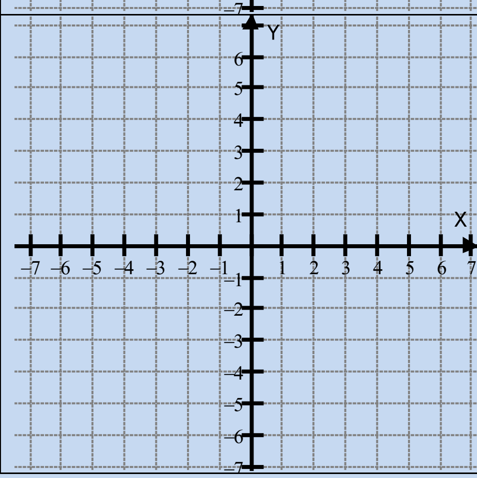
A continuación se retomará lo visto en los otros temas para resumir el procedimiento que se le debe dar a la ecuación general con el fin de encontrar los elementos y la gráfica de la recta.

Transformación de la forma general a las diferentes formas de la recta.		
Forma pendiente-ordenada en el origen	$Ax + By + C = 0$ $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ $m = -\frac{A}{B} \quad b = -\frac{C}{B}$ $y = mx + b$	
Forma simétrica.	$Ax + By + C = 0$ $Ax + By = -C$ $\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = \frac{-C}{-C}$ $\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$ $a = -\frac{C}{A} \quad b = -\frac{C}{B}$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	

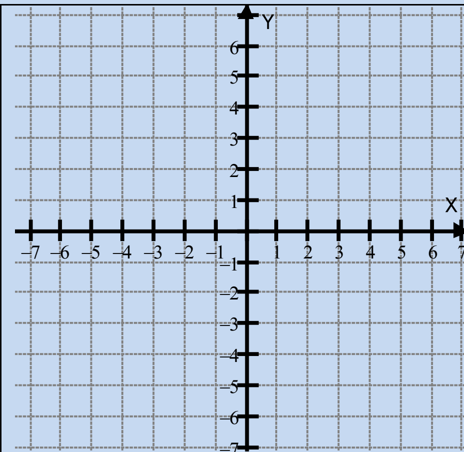
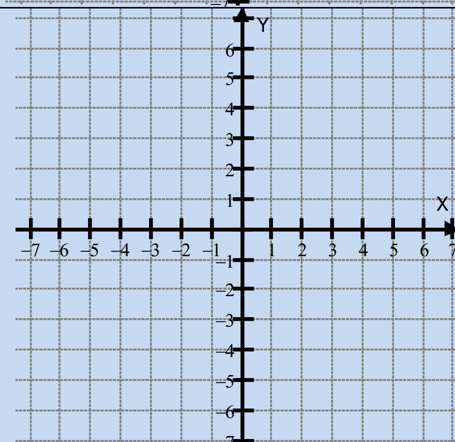
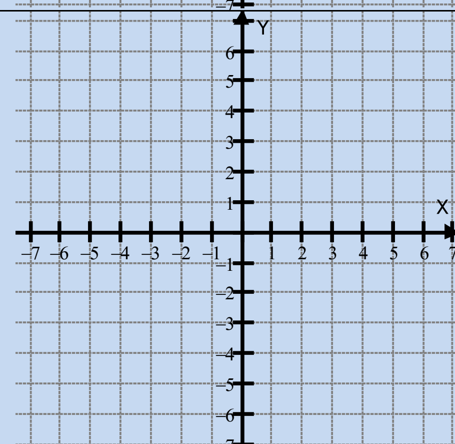
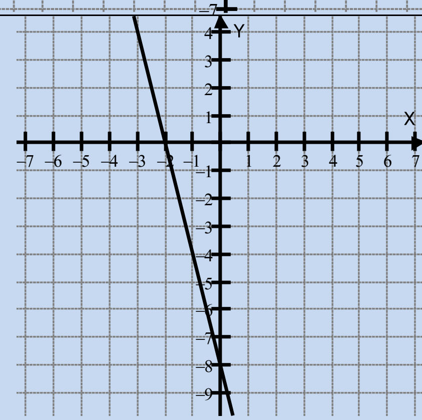
Forma Normal	$Ax+By+C=0$ $x\cos\omega+y\,\mathrm{Sen}\omega-\rho=0$ $\cos\omega=kA$ $\mathrm{Sen}\omega=kB$ $-\rho=kC$ $k=\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad A^2+B^2\neq 0$ $\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$ El signo del radical se elige de la siguiente forma: a) Si $C\neq 0$ el signo es contrario al de C. b) Si $C=0$ y $B\neq 0$, el signo es igual al de B. c) Si $C=0$ y $B=0$, el signo es igual al de A.	

Actividad: 7

Completa la siguiente tabla realizando las conversiones y las gráficas correspondientes.

Forma general	Forma pendiente-ordenada en el origen	Forma simétrica	Forma normal	Gráfica
$3x-2y-6=0$				
	$y=-\dfrac{5}{2}x$			

Actividad: 7 (continuación)

		$-\frac{x}{1}+\frac{y}{4}=1$		
			$x\mathrm{Sen}45^{\circ}+y\mathrm{Cos}45^{\circ}-4=0$	
				
				

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 7</td><td colspan="3">Producto: Complementación de la tabla.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Relaciona las diferentes formas de representar la ecuación de una recta.</td><td colspan="3">Transita entre las diversas formas y representaciones de la ecuación de la recta.</td><td colspan="2">Valora la importancia de poder transitar entre diversas opciones simbólicas para representar una recta, así como su relación con la gráfica.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

■ Cierre

Actividad: 8

Resuelve los siguientes problemas.

1. Dos camiones A y B salen al mismo tiempo desde dos ciudades diferentes rumbo al mismo centro de distribución; la trayectoria de A la define la recta $96t + d - 144 = 0$, y la de B es $-110t - d + 165 = 0$ (d es la distancia al centro de distribución medida en kilómetros y t el tiempo transcurrido medido en horas).

a) Dibuja la trayectoria de los dos camiones en el mismo plano cartesiano.

b) ¿A qué distancia se encontraban al momento de su partida?

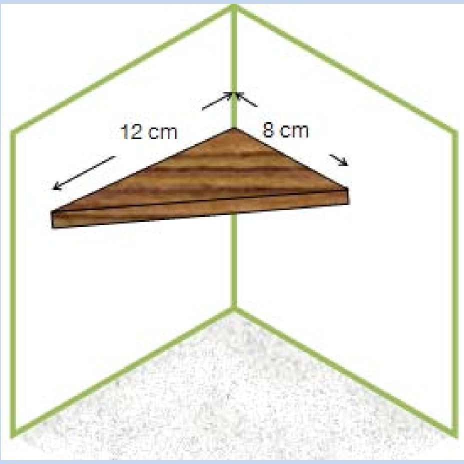
c) ¿Qué camión llegará primero a su destino?

Actividad: 8 (continuación)

d) ¿Qué velocidad tiene cada uno de ellos?

e) ¿En qué parte de la gráfica pueden ser visualizados los elementos de los tres incisos anteriores?

2. Abel instalará una repisa esquinera para colocar un televisor de pantalla plana de 19 plg.; de la esquina de la pared tiene 12 plg. hacia un lado y 8 plg. hacia el otro para poder colocarla, si utiliza estas distancias para diseñarla:
   a) Realiza la gráfica correspondiente.



   b) ¿Cuál es la profundidad de la repisa, es decir la distancia menor de la esquina al borde de la repisa?

   c) Si los televisores se miden por la diagonal, ¿cabe la televisión en la repisa? Realiza los cálculos necesarios.

Actividad: 8 (continuación)

3. Algunas de las ganancias de una editorial se establecen en la siguiente tabla, si el aumento permanece constante, completa la tabla y responde lo que se pide en los incisos posteriores.

Año	2000	2002	2004	2006
ganancia	$1,500,000.00			$2,350,000.00

a) Expresa la ecuación general que modela el comportamiento de la ganancia al transcurrir los años.

b) ¿Cuál será la ganancia en el año 2010?

c) Si la empresa inició en el año 1998, ¿cuál fue su ganancia inicial?

d) ¿Cuál será la ganancia a 10 años de su apertura?

e) Realiza la gráfica correspondiente.

Actividad: 8 (continuación)

4. Un avión despegó del punto (-3, 8) y su trayectoria forma un ángulo de 30º con la horizontal.
   a) ¿Cuál es la ecuación de su trayectoria en su forma general y normal?
   b) Realiza la gráfica correspondiente.

<table>
<tr><th colspan="7">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 8</td><td colspan="4">Producto: Problemas de aplicación.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="7">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="4">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>De diferentes formas de la ecuación, reconoce aquella que le puede solucionar un problema aplicado.</td><td colspan="4">Aplica las diferentes formas de la ecuación de la recta para resolver problemas de la vida cotidiana.</td><td colspan="2">Aprecia la aplicación de las diferentes formas de la recta en la solución de problemas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td colspan="2" rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Secuencia didáctica 2.
Calcula distancias.

Inicio

Actividad: 1

En equipo, lean con cuidado las indicaciones y den respuesta a las situaciones problemáticas que se les plantean.

1. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen y cuya pendiente es $2/3$.

2. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $(6,4)$ y es perpendicular a la recta obtenida en el problema anterior.

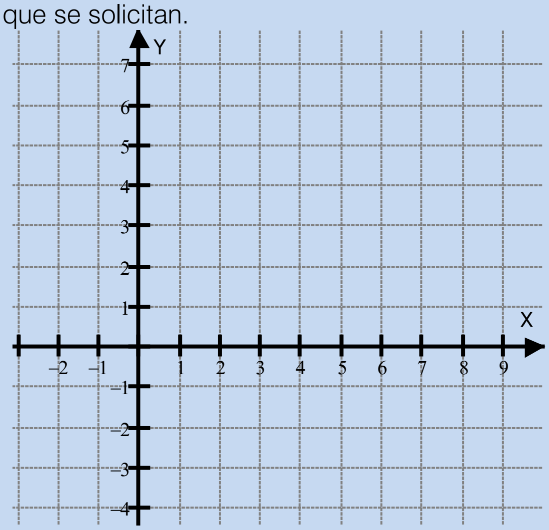
3. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $(9,6)$ y es perpendicular a la recta obtenida en el problema 1.

Actividad: 1 (continuación)

4. Calcula la distancia de las rectas obtenidas en los problemas 2 y 3, al origen.

5. ¿Cómo encuentras la distancia que hay entre las rectas obtenidas en los problemas 2 y 3? ¿A cuánto equivale dicha distancia?

6. Grafica las rectas de los problemas 2 y 3 en el mismo plano cartesiano y representa con un segmento punteado las distancias que se solicitan.



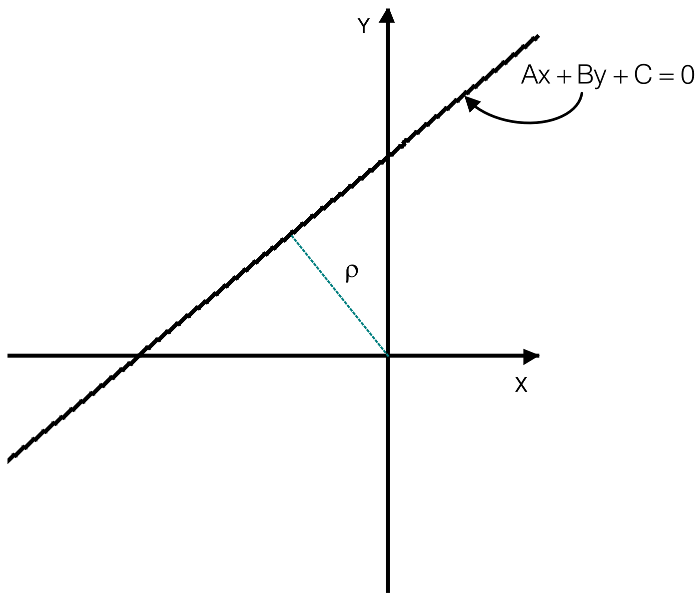
Evaluación						
Actividad: 1	Producto: Ejercicios.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Expresa la ecuación de la recta y su distancia al origen.	Calcula la ecuación de la recta y su distancia al origen.			Propone formas creativas de solucionar los problemas.		
Coevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

Desarrollo

Distancia de un punto a una recta.

En la secuencia anterior se abordó la forma normal de la recta, entre otras, así como la distancia del origen a una recta.

$$\rho = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Recordando que el signo del radical se toma de acuerdo a estos criterios:

a) Si $C \neq 0$ el signo es contrario al de C.
b) Si $C = 0$ y $B \neq 0$, el signo es igual al de B.
c) Si $C = 0$ y $B = 0$, el signo es igual al de A.

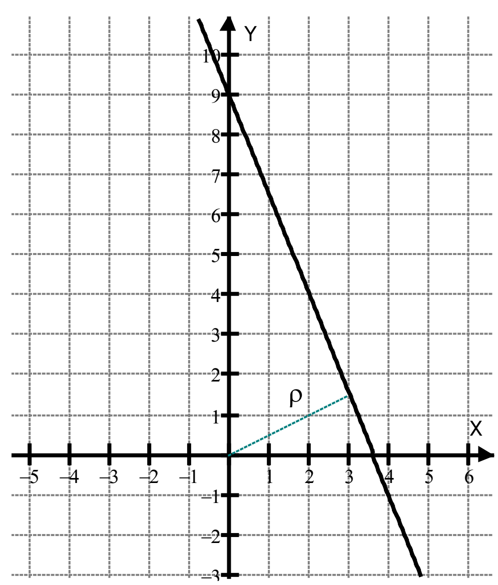
Ejemplo 1.
Calcular la distancia de la recta $5x + 2y - 18 = 0$ al origen.

$A = 5$
$B = 2$
$C = -18$

$$\rho = \frac{-(-18)}{\pm\sqrt{(5)^2 + (2)^2}}$$

$$\rho = \frac{18}{\sqrt{29}}$$

$$\rho = 3.34$$



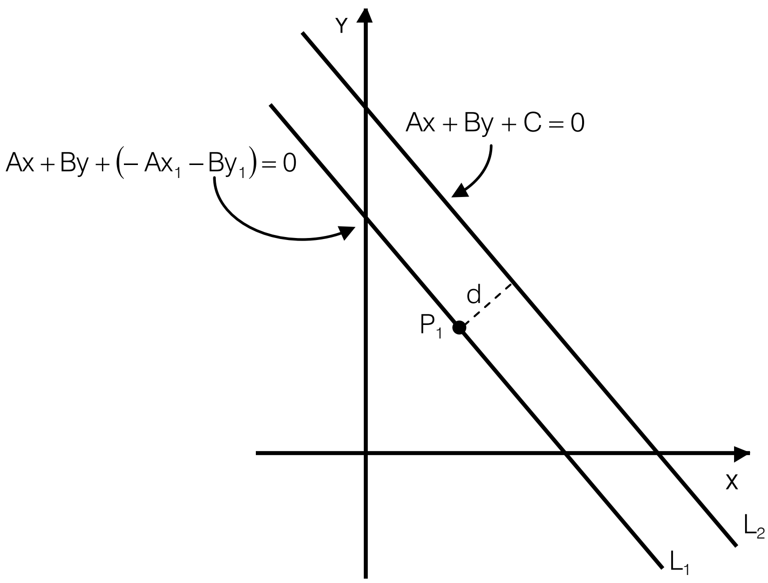
Ahora, se utilizará esta fórmula para encontrar la distancia de un punto cualquiera a una recta, pare ello se consideran dos rectas paralelas L_1 y L_2, además del punto $P_1(x_1, y_1)$ que pertenece a la recta L_1, como se observa en la siguiente gráfica.

Si la recta L_2 tiene como ecuación $Ax + By + C = 0$, entonces su pendiente es $m = -\frac{A}{B}$.

Para conocer la ecuación de la recta L_1, además del punto P_1 que se encuentra en ella, se necesita su pendiente; como la recta L_2 es paralela a la recta L_1, se puede utilizar la misma pendiente.

$$P_1(x_1, y_1) \qquad m = -\frac{A}{B}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - y_1 = -\frac{A}{B}(x - x_1)$$
$$B(y - y_1) = -A(x - x_1)$$
$$By - By_1 = -Ax + Ax_1$$
$$Ax + By - Ax_1 - By_1 = 0$$
$$Ax + By + (-Ax_1 - By_1) = 0$$



No hay que perder de vista que el propósito de este proceso es encontrar la fórmula de la distancia (d) del punto P_1 a la recta $Ax + By + C = 0$.

Como se puede observar en la gráfica, la distancia "d" es la diferencia entre las distancias de ambas rectas al origen.

Si ρ_1 es la distancia de L_1 al origen y ρ_2 es la distancia de L_2 al origen, entonces:

$$d = |\rho_2 - \rho_1|$$

Para L_1:

$$Ax + By + (-Ax_1 - By_1) = 0$$

$$\rho_1 = \frac{-(-Ax_1 - By_1)}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\rho_1 = \frac{Ax_1 + By_1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Para L_2:

$$Ax + By + C = 0$$

$$\rho_2 = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = |\rho_2 - \rho_1|$$

$$d = \left|\frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{Ax_1 + By_1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

$$d = \left|\frac{-C - Ax_1 - By_1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

$$d = \left|\frac{(-1)(C + Ax_1 + By_1)}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

$$d = \frac{|(-1)||(C + Ax_1 + By_1)|}{\left|\pm\sqrt{A^2 + B^2}\right|}$$

$$\boxed{d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right|}$$

Ejemplo 2.

Calcula la distancia del punto P(5, 3) a la recta $-3x + 2y + 20 = 0$.

$A = -3$

$B = 2$

$C = 20$

$x_1 = 5$

$y_1 = 3$

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

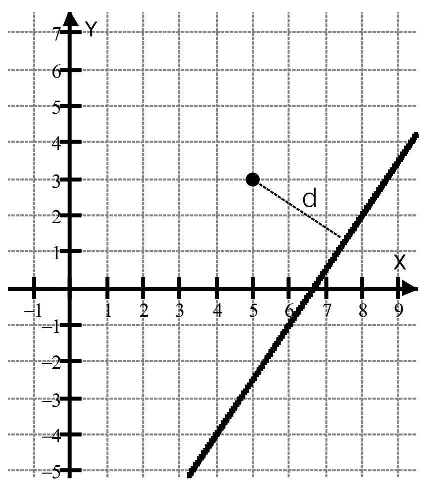
$$d = \left|\frac{(-3)(5) + (2)(3) + 20}{\pm\sqrt{(-3)^2 + (2)^2}}\right|$$

$$d = \left|\frac{11}{-\sqrt{9 + 4}}\right|$$

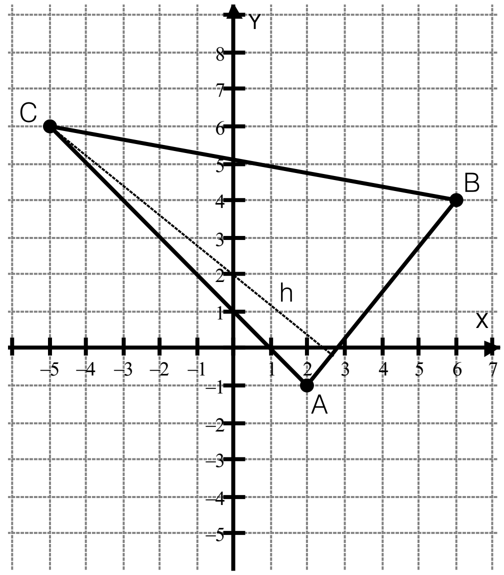
$$d = \left|\frac{11}{-\sqrt{13}}\right|$$

$$d = \frac{11}{\sqrt{13}}$$

$$d \approx 3.05$$



Ejemplo 3.
Calcular la altura que parte del vértice C hacia el lado opuesto AB, en el triángulo ABC cuyos vértices son los puntos $A(2,-1)$, $B(6,4)$ y $C(-5,6)$.



La altura "h" es la distancia del vértice C a la recta que pasa por los puntos AB, así que para resolverlo, primero se debe obtener la ecuación de la recta AB.

$A(2,-1)$
$B(6,4)$

$$m=\frac{4+1}{6-2}$$
$$m=\frac{5}{4}$$

Se tomará el punto A y la pendiente para obtener la ecuación.

$A(2,-1)$
$m=\frac{5}{4}$

$$y-(-1)=\frac{5}{4}(x-2)$$
$$4(y+1)=5(x-2)$$
$$4y+4=5x-10$$
$$-5x+4y+14=0$$

Aplicando la fórmula de distancia de un punto a una recta, se obtiene la altura.

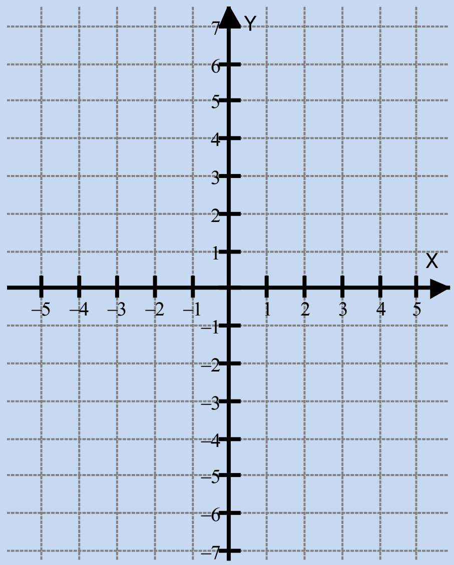
$A=-5$
$B=4$
$C=14$
$x_1=-5$
$y_1=6$

$$h=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$
$$h=\left|\frac{(-5)(-5)+(4)(6)+14}{\pm\sqrt{(-5)^2+(4)^2}}\right|$$
$$h=\left|\frac{63}{-\sqrt{41}}\right|$$
$$h=\frac{63}{\sqrt{41}}$$
$$h\approx 9.84$$

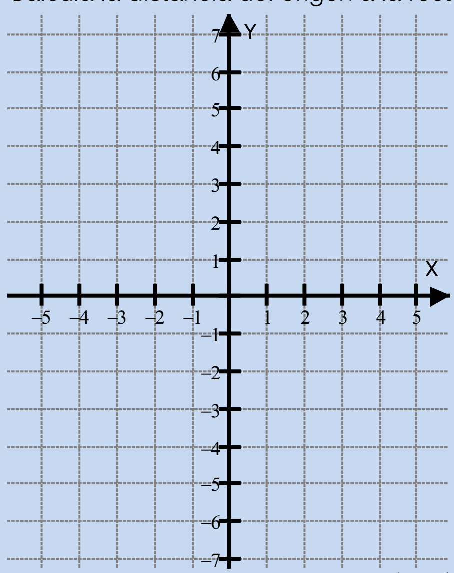
Actividad: 2

Realiza los cálculos necesarios para responder lo que se te pide y la gráfica correspondiente.

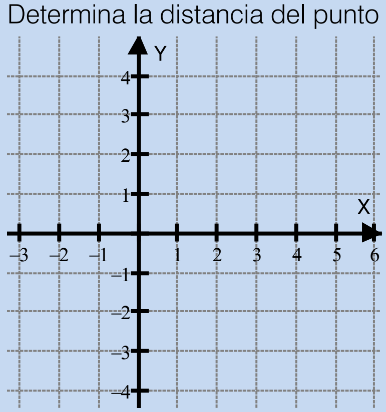
1. Encuentra la distancia del punto $(1,0)$ a la recta $x + 5y - 10 = 0$.



2. Calcula la distancia del origen a la recta $8x - 6y + 18 = 0$.

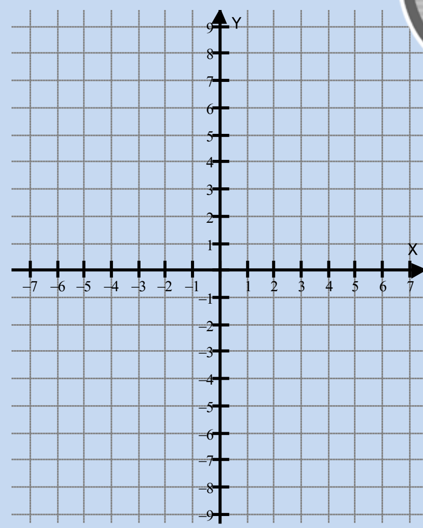


3. Determina la distancia del punto $(5,-4)$ a la recta $7x - 2y = 0$.

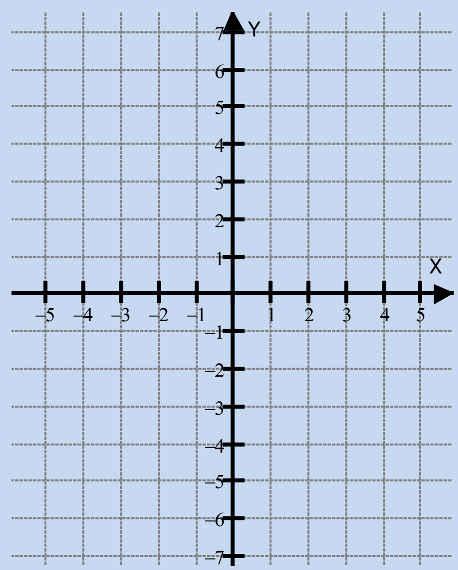


Actividad: 2 (continuación)

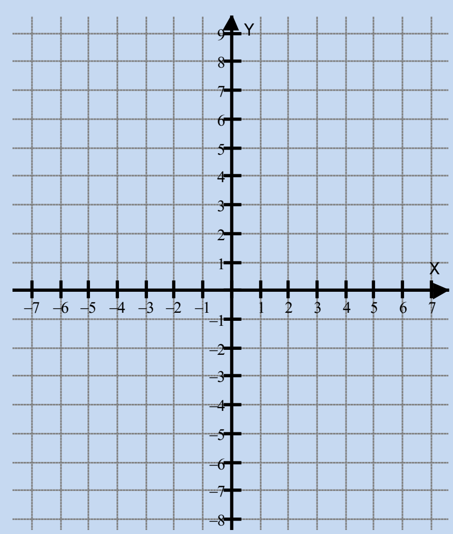
4. Encuentra la distancia del punto $(-6,2)$ a la recta $x-9=0$.



5. Halla la distancia del punto $(1,-8)$ a la recta $y+3=0$.

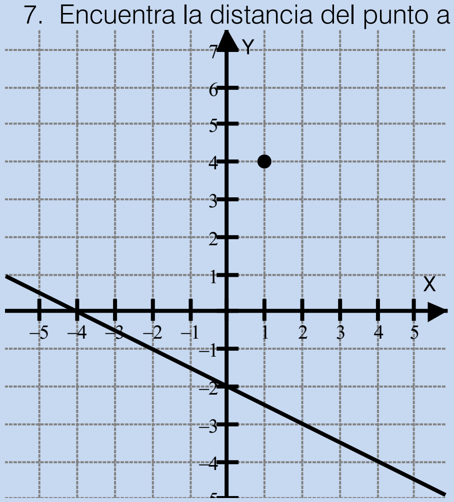


6. Calcula la distancia del punto $(7,9)$ a la recta $2x-3y+13=0$.

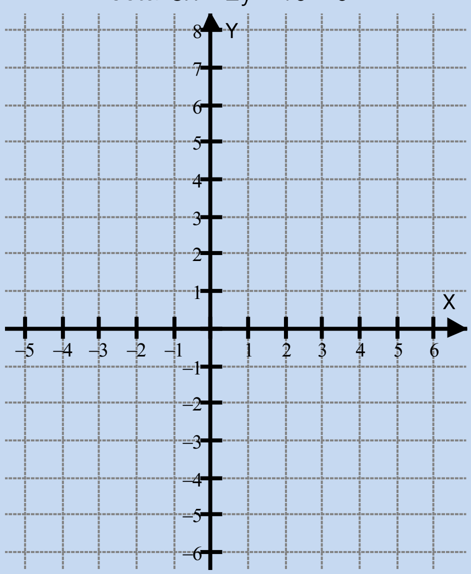


Actividad: 2 (continuación)

7. Encuentra la distancia del punto a la recta que muestra la siguiente gráfica.



8. Calcula la distancia que existe entre la intersección de las rectas $x - 2y + 7 = 0$ y $4x + 3y - 5 = 0$ a la recta $5x - 2y - 10 = 0$



<table>
<tr><th colspan="7">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 2</td><td colspan="3">Producto: Ejercicios.</td><td colspan="3">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="7">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="3">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica los elementos para obtener la distancia de un punto a una recta.</td><td colspan="3">Calcula la distancia de un punto a una recta dada.</td><td colspan="3">Muestra disposición para realizar la actividad, expresar sus dudas y corregir sus errores.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2" colspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

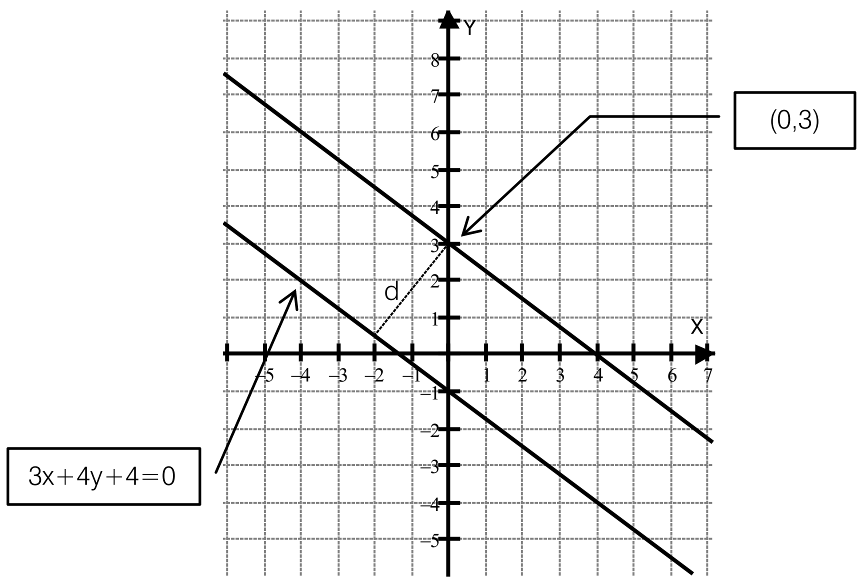
Distancia entre dos rectas paralelas.

Otro de los usos de la distancia entre un punto a una recta es encontrar la distancia entre dos rectas, para ello, se debe localizar un punto que pertenezca a una de ellas, para así poder usar la fórmula, como se muestra a continuación.

Ejemplo 1.
Encontrar la distancia que existe entre las rectas $3x + 4y - 12 = 0$ y $3x + 4y + 4 = 0$.
Se grafican ambas rectas, utilizando la pendiente y ordenada en el origen.

$$3x + 4y - 12 = 0 \qquad\qquad 3x + 4y + 4 = 0$$

$$m = -\frac{3}{4} \quad b = -\frac{-12}{4} = 3 \qquad\qquad m = -\frac{3}{4} \quad b = -\frac{4}{4} = -1$$



Si se toma la recta $3x + 4y + 4 = 0$ y el punto $(0,3)$, la distancia queda:

$A = 3$
$B = 4$
$C = 4$
$x_1 = 0$
$y_1 = 3$

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

$$d = \left|\frac{(3)(0) + (4)(3) + 4}{\pm\sqrt{(3)^2 + (4)^2}}\right|$$

$$d = \left|\frac{16}{-\sqrt{25}}\right|$$

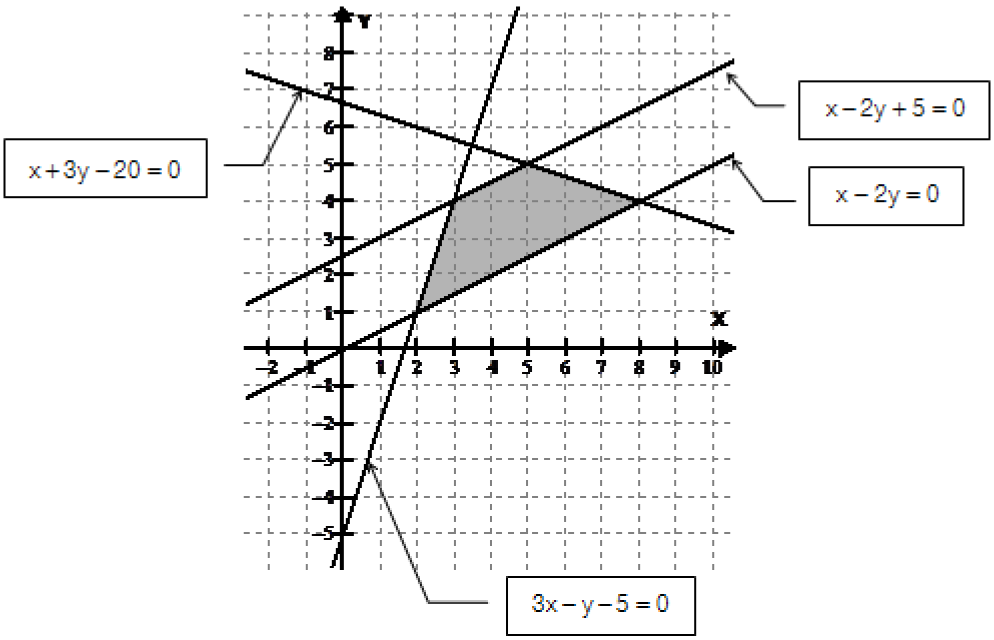
$$d = \left|\frac{16}{-5}\right|$$

$$d = \frac{16}{5}$$

$$d \approx 3.2$$

Ejemplo 2.
Encontrar la altura del trapecio formado por las rectas $3x - y - 5 = 0$; $x - 2y + 5 = 0$; $x + 3y - 20 = 0$; $x - 2y = 0$.

Al graficarse las rectas se obtiene el siguiente dibujo.



La altura que se tomará es la distancia de la recta $x - 2y + 5 = 0$ a la recta $x - 2y = 0$, para ello se sustituirá en la fórmula de distancia los coeficientes de la recta $x - 2y + 5 = 0$ y el origen, ya que éste pertenece a la recta $x - 2y = 0$.

$A = 1$
$B = -2$
$C = 5$
$x_1 = 0$
$y_1 = 0$

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

$$d = \left| \frac{(1)(0) + (-2)(0) + 5}{\pm\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}} \right|$$

$$d = \left| \frac{5}{-\sqrt{5}} \right|$$

$$d = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$d = \frac{5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$d = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

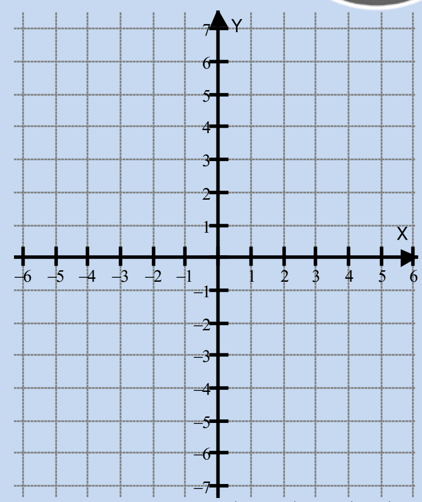
A este proceso se le conoce como racionalización, el cual consiste en quitar el radical del denominador.

Cierre

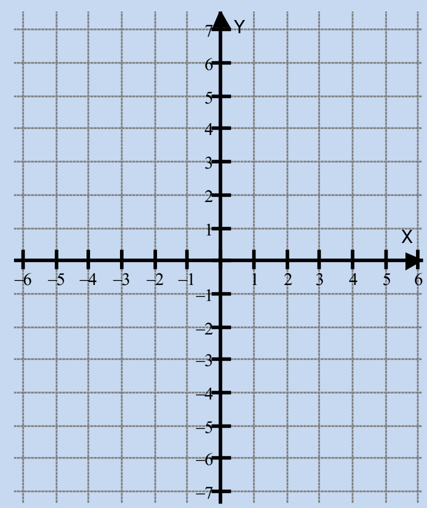
Actividad: 3

Resuelve los siguientes problemas.

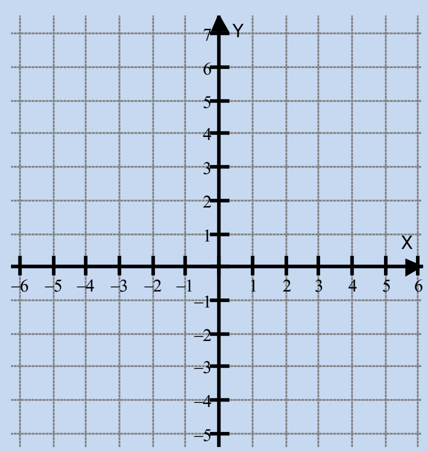
1. Determina el valor de k para que la distancia del origen a la recta $(k-1)x+ky-5=0$ sea $\sqrt{5}$.



2. Encuentra la altura que parte del vértice M al lado LN, del triángulo cuyos vértices son: $L(2,-3)$, $M(0,5)$ y $N(-5,-2)$.



3. Calcula la distancia entre las rectas $2x-3y+8=0$ y $-4x+6y+9=0$.



Actividad: 3 (continuación)

4. Un submarino ubicado en las coordenadas $(3,2)$ detecta un navío enemigo que tiene una trayectoria representada por la ecuación $4x-5y+10=0$. ¿Cuál es la distancia mínima entre el submarino y el navío?

5. Dos aviones establecen sus trayectorias para realizar pruebas de acrobacia, ellos volarán en línea recta bajo las ecuaciones $2x+3y+72=0$ y $2x+3y-108=0$. ¿A qué distancia volarán uno del otro, considerando que las unidades se dan en metros?

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 3</td><td colspan="3">Producto: Problemas de aplicación.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Reconoce los elementos para calcular la distancia de un punto a una recta, así como la distancia entre dos rectas paralelas.</td><td colspan="3">Resuelve problemas cotidianos en los que se pide calcular la distancia de un punto a una recta, así como la distancia entre dos puntos.</td><td colspan="2">Aprecia la utilidad de la fórmula de la distancia entre un punto y una recta para la solucionar problemas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

BLOQUE 5

Emplea la circunferencia.

Competencias disciplinares básicas:

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Unidad de competencia:

- Construye e interpreta modelos auxiliándose de distintas formas de la ecuación de la circunferencia al resolver problemas derivados de situaciones reales, hipotéticas o teóricas.
- Interpreta tablas, gráficas y expresiones simbólicas relacionadas con distintas formas de la ecuación de la circunferencia.
- Argumenta la pertinencia de utilizar una forma específica de la ecuación de la circunferencia dependiendo de la naturaleza de la situación bajo estudio.

Atributos a desarrollar en el bloque:

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
8.1 Propone maneras de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
8.3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Tiempo asignado: 11 horas

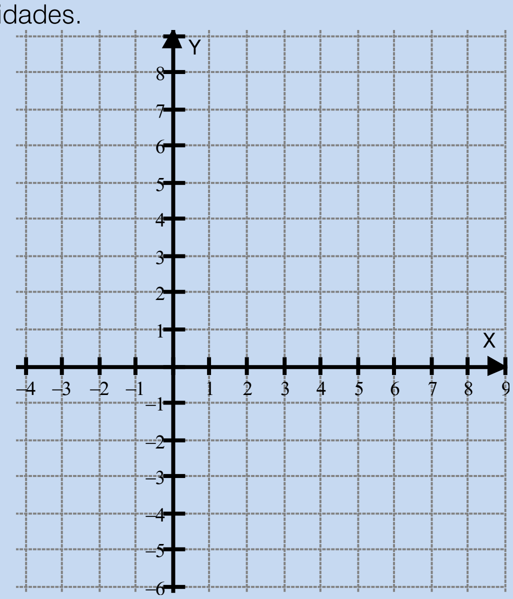
Secuencia didáctica 1.
Caracterización geométrica.

Inicio

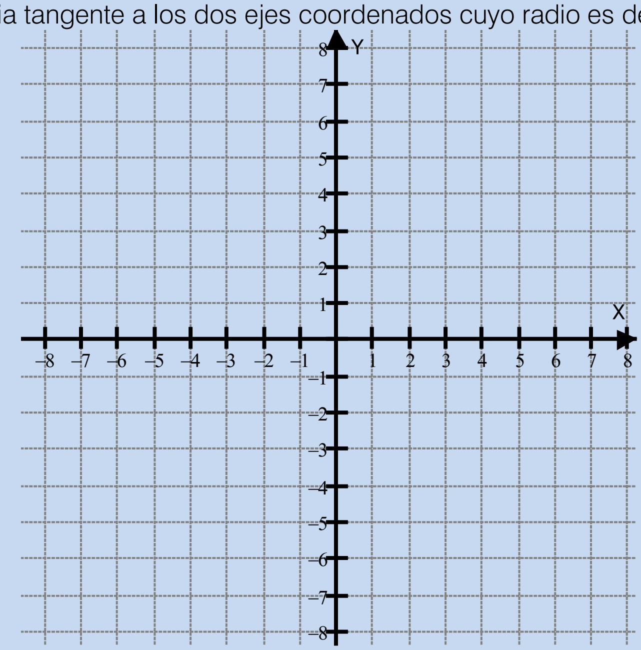
Actividad: 1

Responde los siguientes cuestionamientos.

1. Dibuja el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan del punto $(3,2)$, en una distancia de 5 unidades.



2. Dibuja una circunferencia tangente a los dos ejes coordenados cuyo radio es de 4 unidades.



Actividad: 1 (continuación)

3. Describe lo que aprendiste de la circunferencia en asignaturas anteriores, tanto de bachillerato como de secundaria.

4. Explica qué aplicaciones ha tenido el conocimiento de la circunferencia en tu vida diaria o de qué manera te ha sido útil.

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 1</td><td colspan="3">Producto: Descripciones.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica la circunferencia como lugar geométrico.

Reconoce la utilidad de la circunferencia.</td><td colspan="3">Grafica la circunferencia en su descripción como lugar geométrico.</td><td colspan="2">Reflexiona sobre los cuestionamientos y es propositivo al responderlos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Desarrollo

Actividad: 2

Realiza la siguiente práctica:

Materiales:

- Plastilina en barra de cualquier color.
- Tarjeta plástica de teléfono.

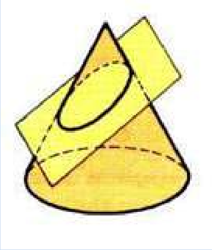
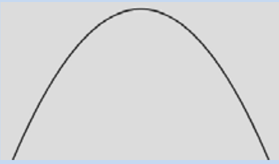
Procedimiento:

I. Construye un cono de plastilina.

II. Utiliza la tarjeta telefónica para realizar los cortes que se te indican, después completa la tabla y vuelve a formar el cono para hacer el siguiente corte.

Cortes:

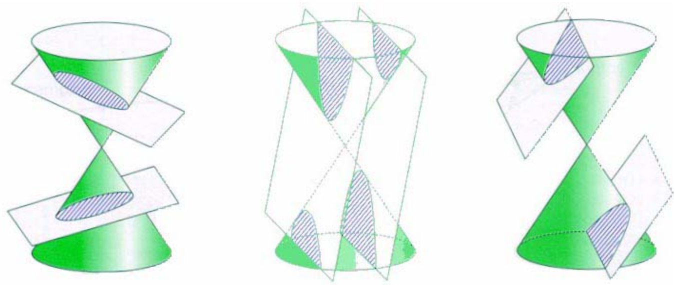
1. Horizontal.
2. Diagonal.
3. Paralelo a una generatriz.

Corte	Dibujo	Curva	Nombre
Horizontal			
			
			Parábola

Evaluación						
Actividad: 2	Producto: Práctica.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Identifica las curvas que se obtienen a partir de cortes del cono.	Grafica las curvas cónicas a partir de los cortes que realiza en el cono.			Realiza la práctica de forma creativa y entusiasta.		
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

Se llaman *curvas cónicas* a todas aquellas que se obtienen cortando un cono con un plano. Debido a su origen las curvas cónicas se llaman a veces secciones cónicas.

El matemático griego Menecmo (350 A.C.) descubrió estas curvas, y fue el matemático griego Apolonio de Perga (262-190 A.C.) el primero en estudiar detalladamente las curvas cónicas y encontrar la propiedad plana que las definía. Apolonio descubrió que las cónicas se podían clasificar en tres tipos, a los que dio el nombre de: elipses, hipérbolas y parábolas.

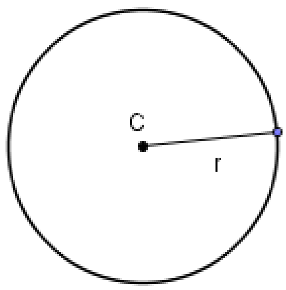


Dentro de ésta clasificación, ¿dónde se encuentra la circunferencia?

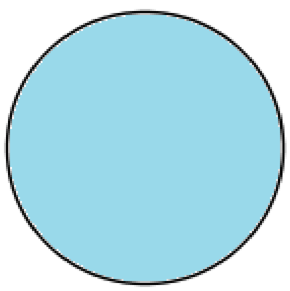
La circunferencia como lugar geométrico.

En la secuencia 2 del primer bloque se abordaron los lugares geométricos, uno de ellos es el de la circunferencia, la cual se genera a partir de un punto fijo y un segmento anclado en uno de sus lados al punto, girándolo 360º.

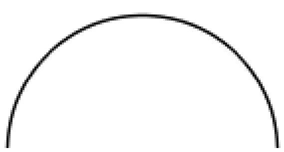
Circunferencia: Lugar geométrico del conjunto de puntos que equidistan (están a la misma distancia) de un punto fijo llamado centro.



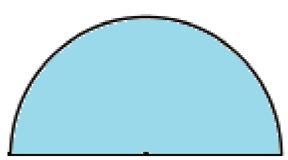
Círculo: Superficie plana limitada por la circunferencia.



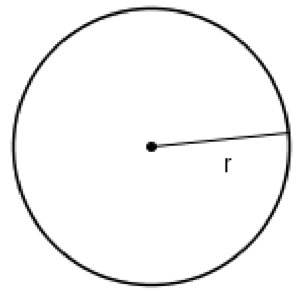
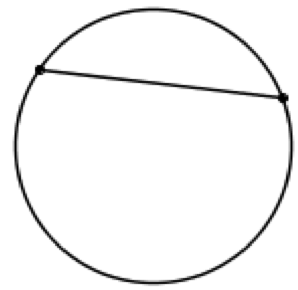
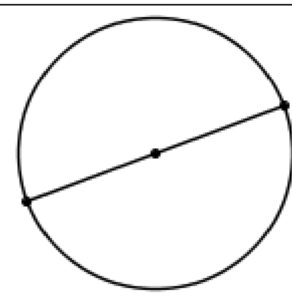
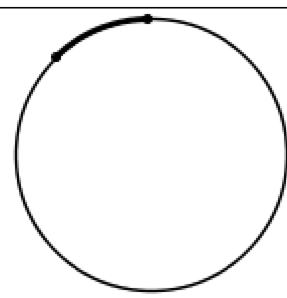
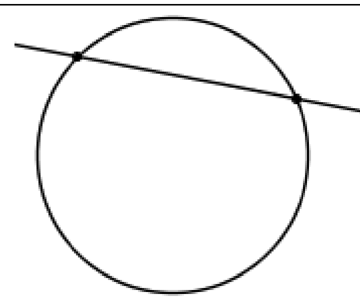
Semicircunferencia: Mitad de la circunferencia.

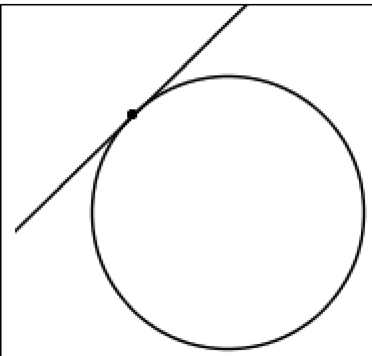
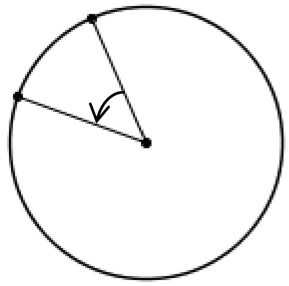
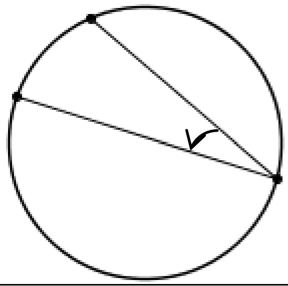
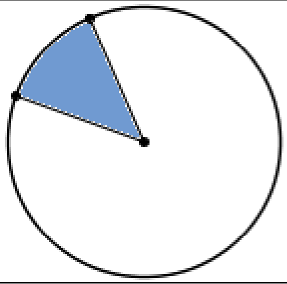
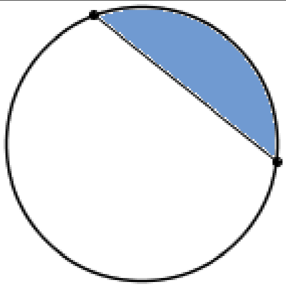


Semicírculo: Mitad del círculo.



Elementos asociados con una circunferencia.

Elemento	Definición	Figura
Radio	Segmento de recta que une al centro con cualquier punto de la circunferencia.	
Cuerda	Segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia.	
Diámetro	Segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro.	
Arco	Parte de la circunferencia que une dos puntos de la misma.	
Secante	Recta que interseca dos puntos de la circunferencia.	

Tangente	Recta que toca en un punto a la circunferencia.	
Ángulo central	Ángulo formado por dos radios.	
Ángulo inscrito	Ángulo formado por dos cuerdas, cuyo vértice es un punto de la circunferencia.	
Sector circular	Parte del círculo comprendida entre dos radios y el arco correspondiente.	
Segmento circular	Parte del círculo comprendida entre una cuerda y el arco correspondiente.	

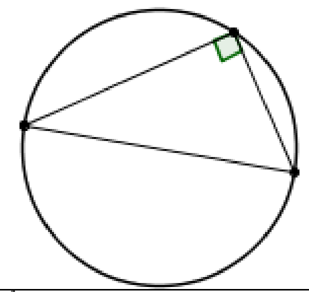
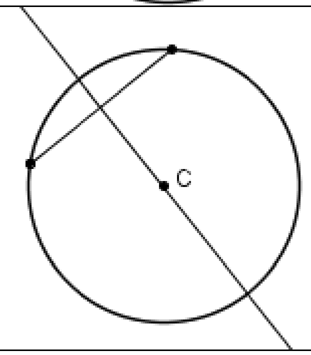
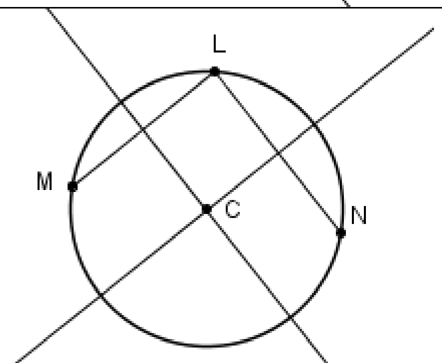
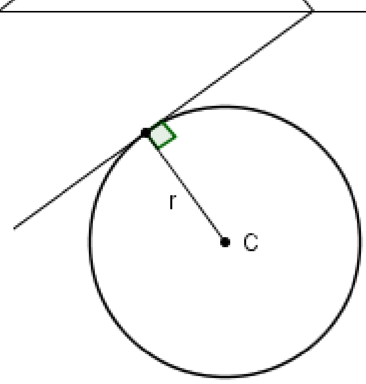
Sitios Web recomendados:

En el siguiente sitio, encontrarás ejercicios de las cónicas, para que refuerces tus conocimientos.

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Introduccion_conicas/index.htm

Con la ayuda del programa Geogebra, puedes comprobar las siguientes propiedades.

Propiedades de la circunferencia.

Propiedad	Figura
El ángulo inscrito en una circunferencia cuyos extremos no comunes son los extremos de uno de los diámetros, es un ángulo recto.	
La mediatriz de cualquier cuerda de la circunferencia pasa por el centro.	
Tres puntos determinan una circunferencia y las mediatrices de las cuerdas correspondientes se intersecan en el centro.	
La recta tangente es perpendicular al radio que lo interseca.	

Algunas de las fórmulas importantes para la aplicación del círculo y circunferencia, son las relacionadas con cálculo de áreas y longitudes, como las siguientes:

Nombre	Fórmula	Variables
Área del círculo.	$A = \pi r^2$	A: Área r: Radio
Perímetro del círculo.	$P = 2\pi r$	P: Perímetro r: Radio
Longitud de la circunferencia	$L = 2\pi r$	L: Longitud r: Radio
Longitud de arco de la circunferencia	$L = r\theta$	L: Longitud r: Radio θ : Ángulo central (medido en radianes)
Área de un sector circular.	$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$	A: Área r: Radio θ : Ángulo central (medido en radianes)

Ejemplo 1.
Calcular el área y perímetro de un círculo cuyo diámetro mide 6 dm.
Utilizando las fórmulas, se tiene:

$$A = \pi r^2$$
$$A = \pi(3\,\text{dm})^2$$
$$A = 9\pi\,\text{dm}^2$$
$$A \approx 28.27\,\text{dm}^2$$

$$P = 2\pi r$$
$$P = 2\pi(3\,\text{dm})$$
$$P = 6\pi\,\text{dm}$$
$$P \approx 18.85\,\text{dm}$$

Ejemplo 2.
Jaime diseña una puerta de cocina en forma rectangular con una ventana circular de vidrio, la cual se fijará con una tira de aluminio, como se muestra en la figura, ¿cuál es la longitud de la tira que tiene que comprar, si el diámetro de la ventana debe ser de medio metro? y ¿cuál será el área de visibilidad de la ventana?

$$L = 2\pi r$$
$$L = 2\pi(0.25\,\text{m})$$
$$L \approx 1.57\,\text{m}$$

$$A = \pi r^2$$
$$A = \pi(0.25\,\text{m})^2$$
$$A \approx 0.20\,\text{m}^2$$

Ejemplo 3.
La rueda de una bicicleta de montaña tiene 31 cm de radio, ¿qué distancia en km. ha de recorrer al dar 50,000 vueltas?
Primero se obtiene la longitud de la rueda de la bicicleta.

$$L = 2\pi r$$
$$L = 2\pi(31\text{cm})$$
$$L \approx 194.78\ \text{cm}$$

La longitud convertida en Km es 1.9478 x 10^{-3}.
La distancia recorrida es:

$$(194.78 \times 10^{-3}\ \text{Km})(50{,}000) = 97.39\,\text{Km}$$

Ejemplo 4.
Las características de la moneda de cinco pesos[1] son:

Elementos de diseño	Composición
• Tipo: C • Diámetro: 25.5 mm. • Forma: Circular • Peso: 7.07 gramos • Canto: Liso • Frente: El Escudo Nacional con la leyenda "ESTADOS UNIDOS MEXICANOS", formando el semicírculo superior. • Reverso: En la parte central a la izquierda aparece el símbolo "$" y al centro el número cinco "5" como valor facial, en el campo superior izquierdo el año de acuñación, en el campo derecho al centro el símbolo de la Casa de Moneda de México "M". Como motivo principal, una estilización del Anillo de las Serpientes de la Piedra del Sol. 	Moneda bimetálica constituida por dos aleaciones, una para su parte central y otra para su anillo perimétrico, como sigue: 1. Parte central de la moneda. Aleación de bronce-aluminio. 92% de cobre; 6% de aluminio; y 2% de níquel. En esta composición el peso será de 3.25 gramos. 2. Anillo perimétrico de la moneda. Aleación de acero inoxidable. Entre 16% y 18% de cromo; 0.75% de níquel, máximo; 0.12% de carbono, máximo; 1% de silicio, máximo; 1% de manganeso, máximo; 0.03% de azufre, máximo; 0.04% de fósforo, máximo; y lo restante de hierro. En esta composición el peso será de 3.82 gramos.

Calcular:

a) El área de la parte central de la moneda.

$$A_{\text{Central}} = \pi r^2$$
$$A_{\text{Central}} = \pi(8.5\,\text{mm})^2$$
$$A_{\text{Central}} \approx 226.98\ \text{mm}^2$$

b) El área del anillo perimétrico de la moneda.
En este caso, se requiere obtener el área total y restarle el área central, para obtener la del anillo.

$$A_{\text{Total}} = \pi r^2$$
$$A_{\text{Total}} = \pi(12.75\ \text{mm})^2$$
$$A_{\text{Total}} \approx 510.71\,\text{mm}^2$$

$$A_{\text{Anillo}} = 510.71\,\text{mm}^2 - 226.98\ \text{mm}^2$$
$$A_{\text{Anillo}} = 283.73\ \text{mm}^2$$

c) El perímetro de la parte central.

$$P_{\text{Central}} = 2\pi r$$
$$P_{\text{Central}} = 2\pi(8.5\,\text{mm})\,|\,|$$
$$P_{\text{Central}} \approx 53.41\,\text{mm}$$

d) El perímetro de la moneda.

$$P_{\text{Total}} = 2\pi r$$
$$P_{\text{Total}} = 2\pi(12.75\ \text{mm})$$
$$P_{\text{Total}} \approx 80.11\,\text{mm}$$

[1] http://www.banxico.org.mx/billetes-y-monedas/informacion-general/billetes-y-monedas-de-fabricacion-actual/billetes-y-monedas-de-fabricacion-actual/monedas/moneda-5-pesos.html

Actividad: 3

Resuelve los siguientes problemas.

1. ¿Cuántas vueltas debe dar un aro de 2 cm de radio, para recorrer 0.314 km?

2. Si 10 personas se sientan alrededor de una mesa circular de 4 m de radio, ¿qué arco de circunferencia les corresponde?

3. Un joven tiene un aro de 0.8 m. de diámetro. ¿Cuántos kilómetros recorre el aro, al dar 500 vueltas?

4. Un carpintero construirá una mesa redonda para 12 personas, con un arco de 0.75 m entre ellas. ¿Qué longitud y el radio debe tener la mesa, y cuál es su área?

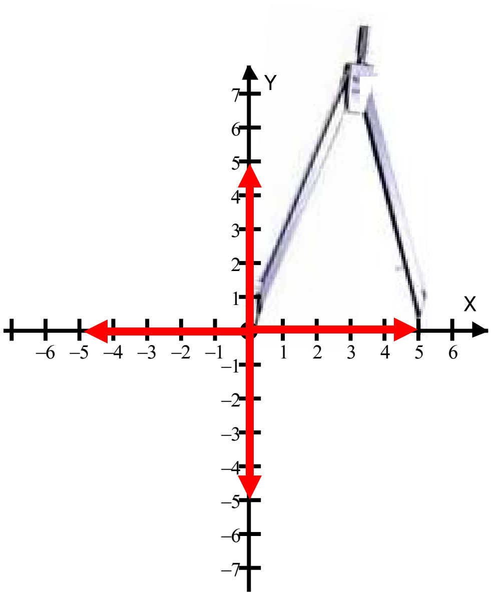
5. La longitud de una circunferencia es de 376.8 cm. ¿Cuál es su diámetro y su radio, expresados en metros?

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 3</td><td colspan="3">Producto: Problemas de aplicación.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Reconoce las fórmulas de área y longitud de la circunferencia, que se utilizan para resolver problemas cotidianos.</td><td colspan="3">Aplica las fórmulas de área y longitud de la circunferencia, para resolver problemas cotidianos.</td><td colspan="2">Reflexiona sobre los datos proporcionados y propone formas de resolver los problemas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Formas de trazo a partir de la definición.

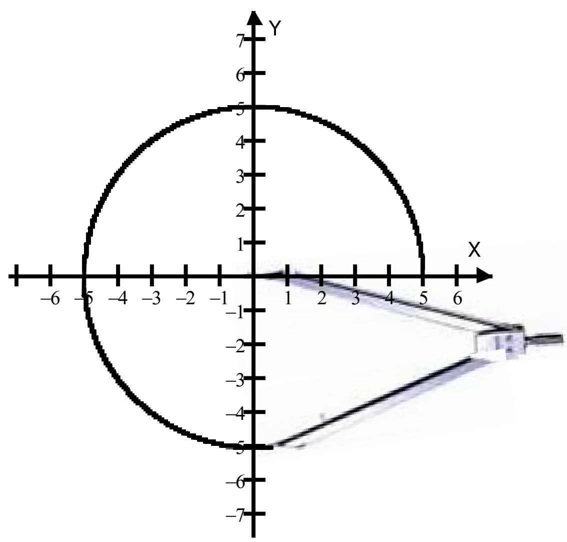
En la definición de la circunferencia los elementos principales son el centro y el radio. El trazo de una circunferencia se puede realizar fácilmente con la ayuda de un compás, el cual constituye una herramienta cuyo funcionamiento y utilidad están basados en esa definición, puesto que el extremo fijo se ancla en el centro y su abertura representa el radio, permitiendo así dibujar el lugar geométrico, como se observa en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1
Graficar la circunferencia con centro en el origen y radio 5.

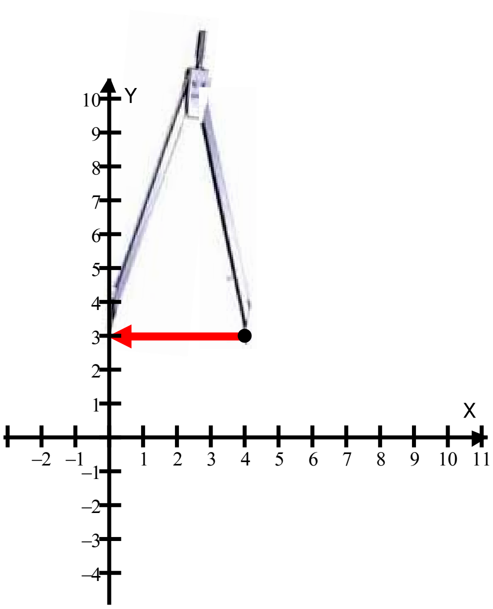


Se fija el compás en el origen y se abre 5 unidades en cualquiera de los cuatro sentidos, a la derecha, izquierda, arriba o abajo.

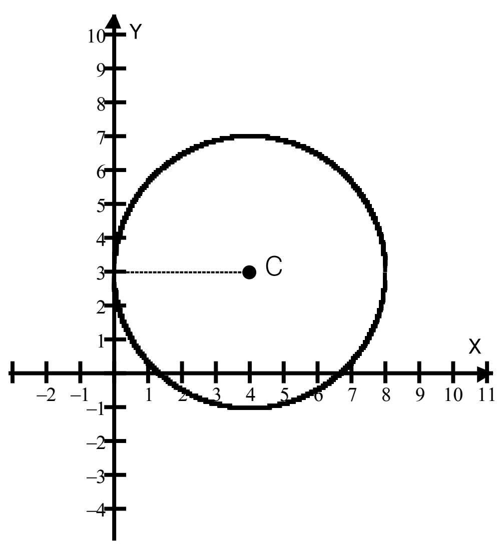
Posteriormente se gira el compás y se traza la circunferencia.



Ejemplo 2.
Graficar la circunferencia con centro en el punto $C(4,3)$ y tangente al eje Y.



En este caso, después de ubicar el centro, el único sentido en el que se abre el compás es hacia la izquierda y tocar al eje Y, puesto que el radio debe formar un ángulo de 90º con él.



Ejemplo 3.

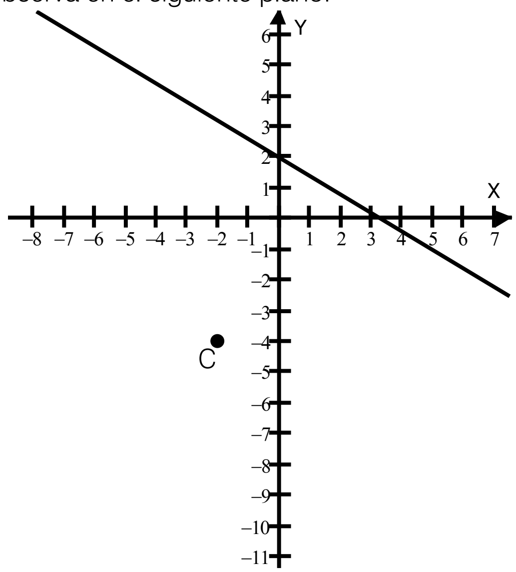
Trazar la circunferencia con centro en el punto $C(-2,-4)$ y tangente a la recta $3x+5y-10=0$

Para dibujar la circunferencia, primero se debe obtener la pendiente y la ordenada en el origen de la recta.

$$3x+5y-10=0$$

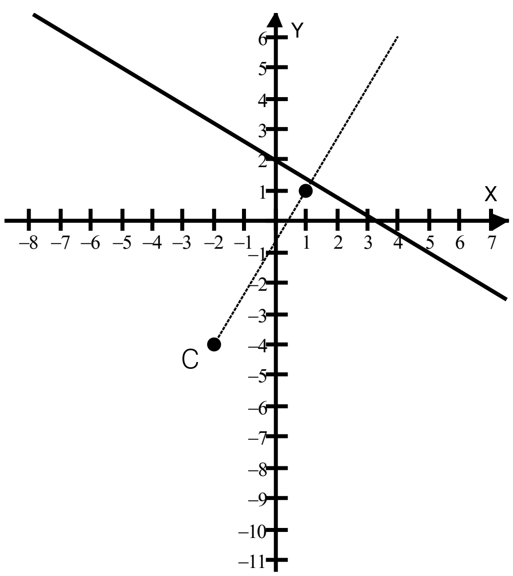
$$m=-\frac{3}{5} \qquad b=-\frac{-10}{5}=2$$

La gráfica de la recta y el centro se observa en el siguiente plano.

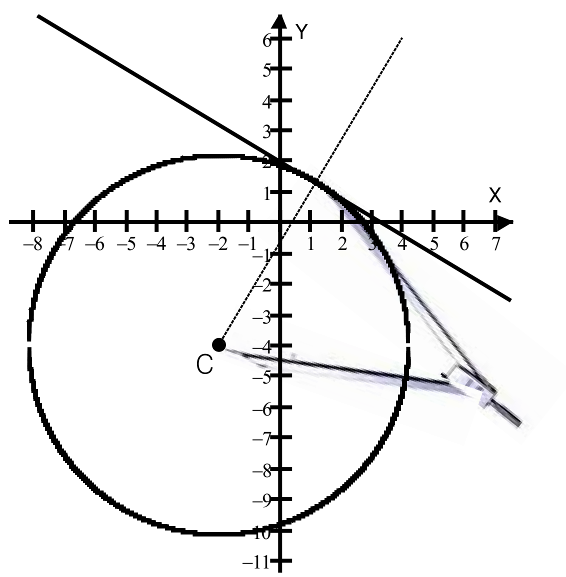


Para trazar el radio se tiene que hacer con la pendiente del mismo, la cual es inversa y de signo contrario a la pendiente de la recta, y así ubicar a partir de $C(-2,-4)$ otro punto de guía.

$$m=\frac{5}{3} \qquad C(-2,-4)$$



Se extiende el segmento punteado para ubicar el corte con la recta, que es hasta donde llega el radio.

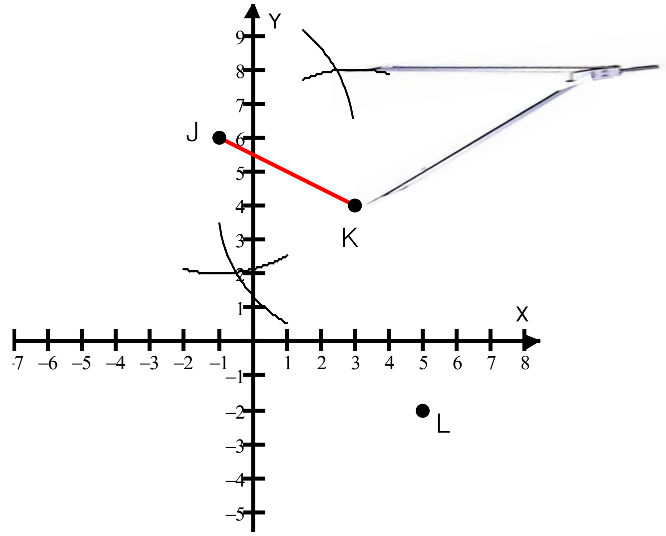


Ejemplo 4.

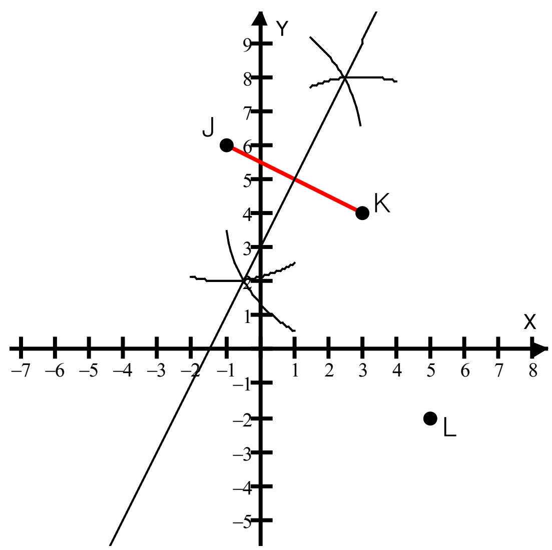
Graficar la circunferencia que pasa por los puntos $J(-1, 6)$, $K(3, 4)$ y $L(5, -2)$.

Para graficarla se utiliza la propiedad de la circunferencia que dice: las mediatrices de los segmentos que determinan los tres puntos por donde pasa la circunferencia se intersecan en el centro.

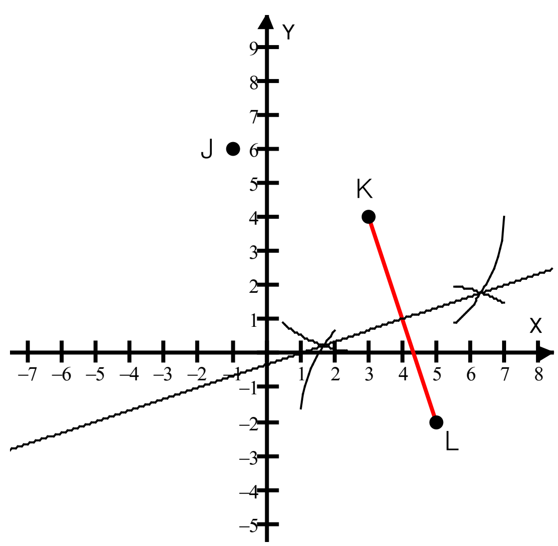
Para graficar cada mediatriz, se abre el compás con un radio mayor que la mitad del segmento, y apoyándose en cada extremo del segmento se trazan los arcos de circunferencia, como se observa en este plano cartesiano.

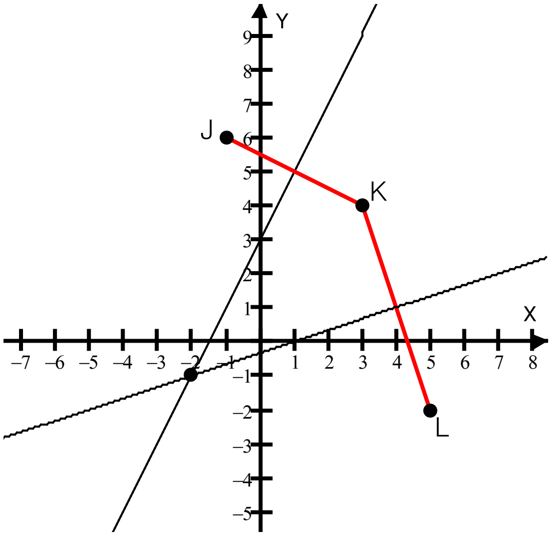


Ahora se grafica la mediatriz utilizando las intersecciones de los arcos trazados.



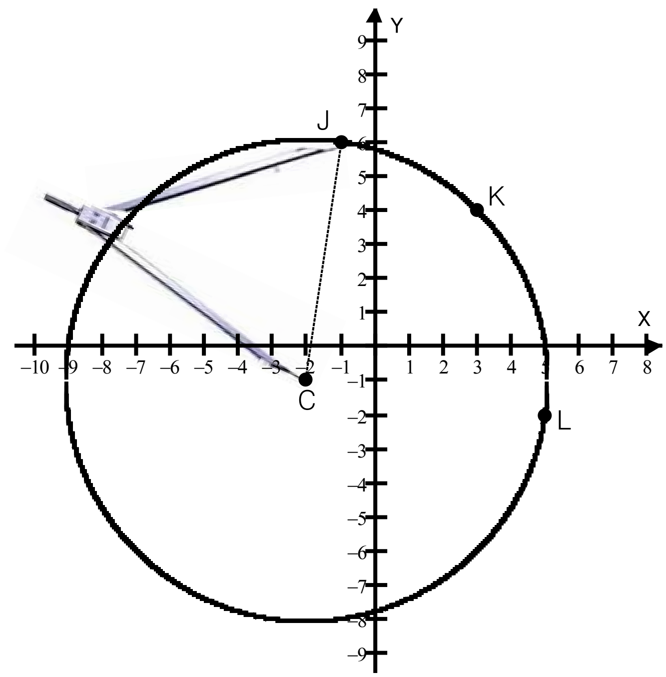
Se realizan los mismos pasos para trazar la mediatriz del siguiente segmento.





Una vez graficadas las dos mediatrices, se ubica el punto de intersección de las mismas, el cual es el centro de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados.

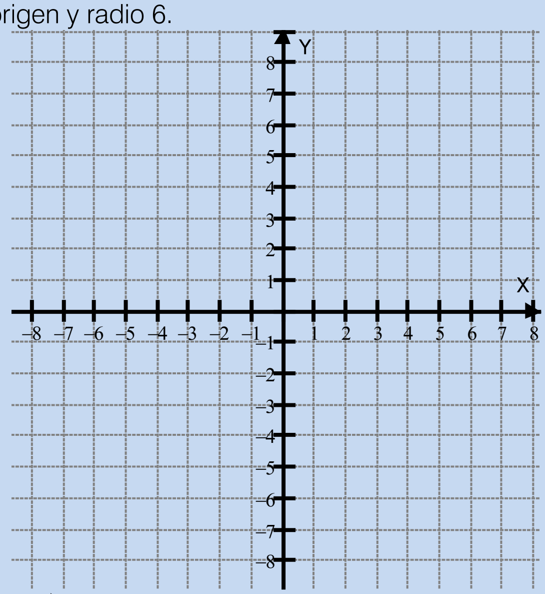
Se fija el compás en el centro y la abertura la determina la distancia del centro a cualquiera de los puntos, la cual corresponde al radio.



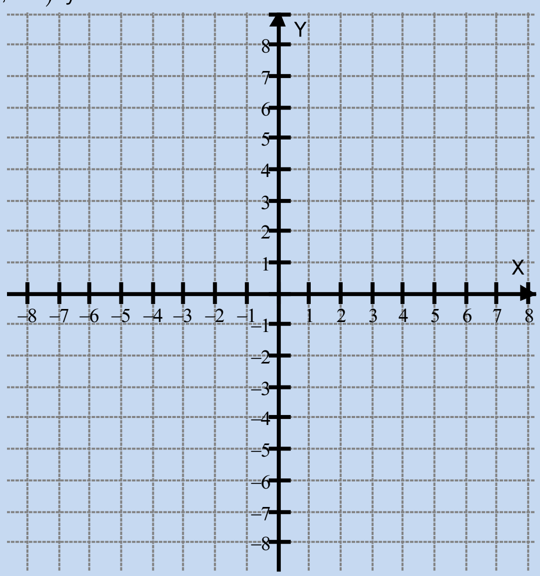
Actividad: 4

Traza las circunferencias que cumplen con las siguientes condiciones.

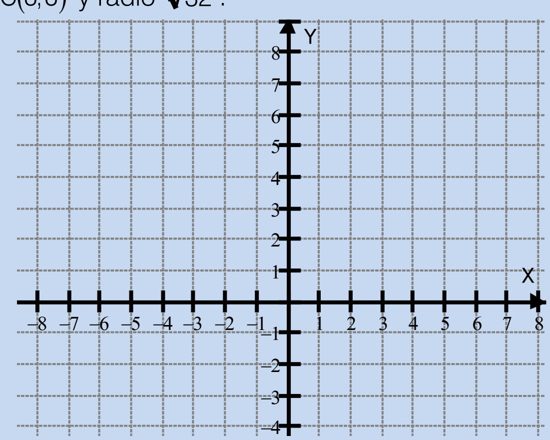
1. Con centro en el origen y radio 6.



2. Con centro en el punto $C(-2,-4)$ y radio 3.

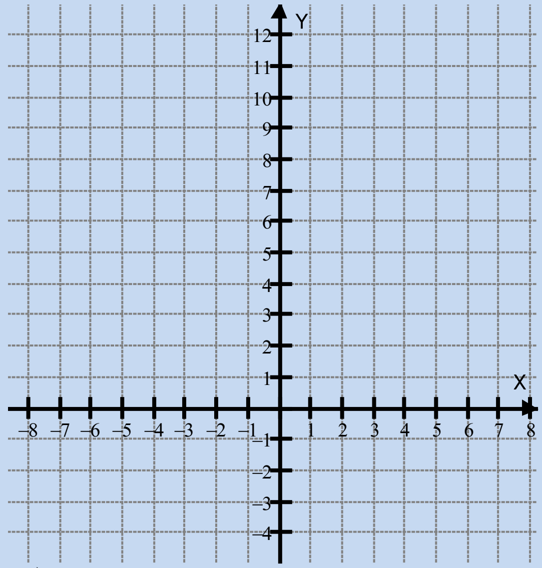


3. Con centro en el punto $C(3,3)$ y radio $\sqrt{32}$.

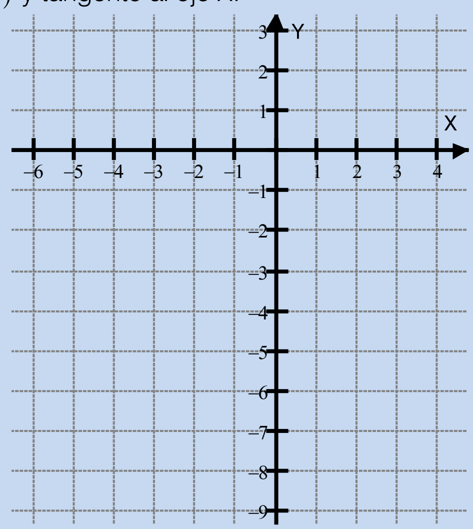


Actividad: 4 (continuación)

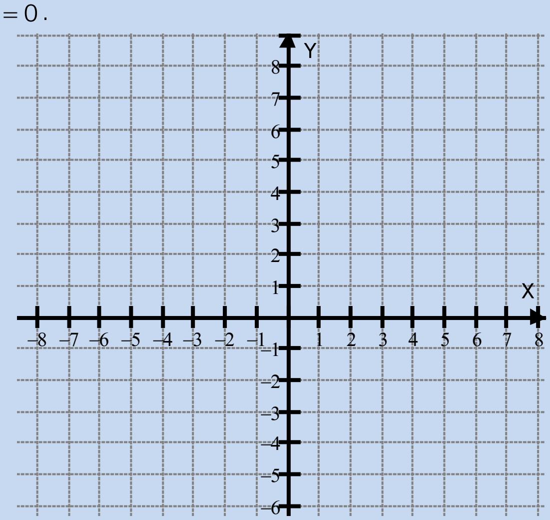
4. Con centro en el punto $C(0,5)$ y radio $\frac{13}{2}$.



5. Con centro en el punto $C(-1,-4)$ y tangente al eje X.

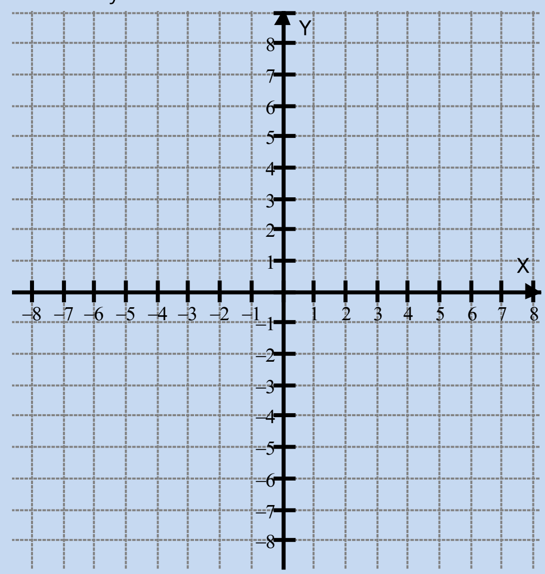


6. Con centro en el origen y tangente a la recta $5x-4y+20=0$.

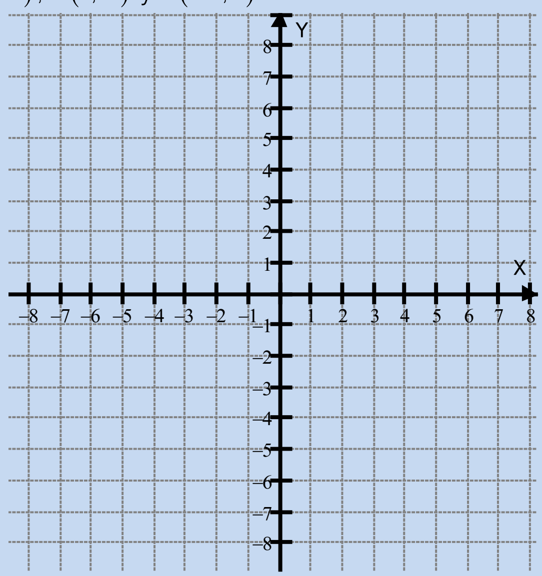


Actividad: 4 (continuación)

7. Con centro en el punto $C(1,-2)$ y tangente a la recta $4y-23=0$.



8. Pasa por los puntos $D(1,6)$, $E(5,4)$ y $F(-4,4)$.



Evaluación						
Actividad: 4	Producto: Gráficas.				Puntaje:	
Saberes						
Conceptual	Procedimental				Actitudinal	
Reconoce el procedimiento para trazar una circunferencia dependiendo de las condiciones de la misma.	Grafica circunferencias dependiendo de ciertas condiciones.				Realiza la actividad con una actitud positiva y propositiva.	
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

■ Cierre

Actividad: 5

En equipo, desarrollen lo que se pide en cada sección.

I. Realicen los cálculos necesarios para darle solución a los siguientes problemas
.

1. Una pista circular está limitada por dos circunferencias concéntricas; el radio de la exterior mide 30 m y el de la interior 24 m. ¿Cuántos dm tiene más la primera que la segunda circunferencia?

2. Alrededor de una plaza circular de 50 m de radio, se colocarán árboles con 2 m de distancia entre sí. ¿Cuántos se pueden colocar?

3. La saeta del minutero de un reloj mide 4 cm; expresa en metros el camino recorrido por la punta de la saeta durante un día.

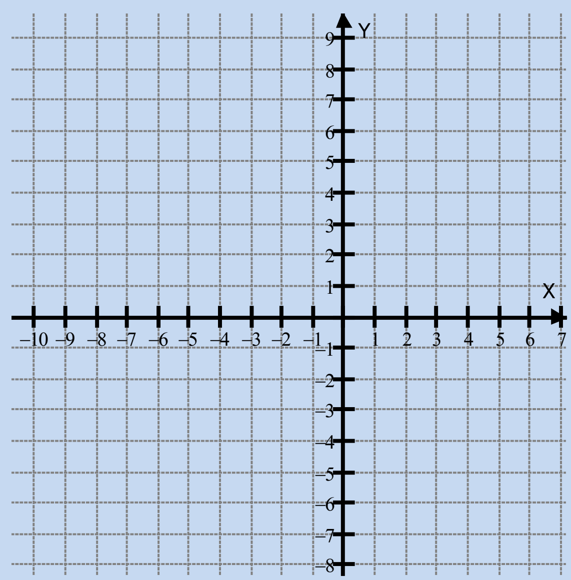
Actividad: 5 (continuación)

4. Con un alambre se ha formado un rectángulo de 200 cm de largo y 114 cm. de ancho. Si con el mismo se hace un aro, ¿cuántos m tendrá su diámetro?

5. Calcula la longitud de una circunferencia que tiene circunscrito un cuadrado de 20 cm de lado.

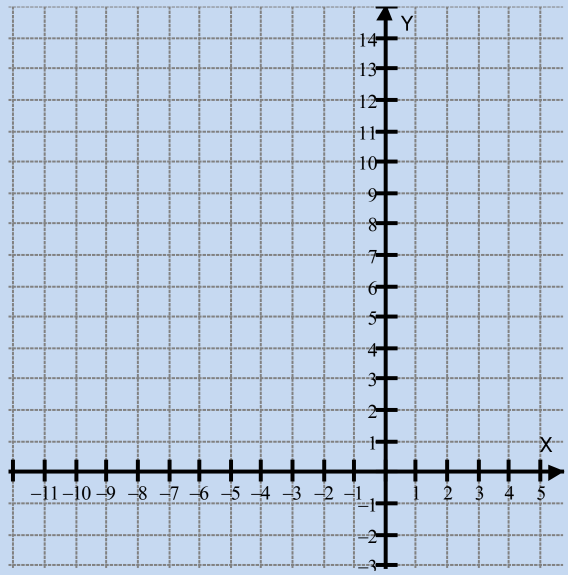
II. Grafiquen las circunferencias que cumplen con las siguientes condiciones.

1. El centro de la circunferencia es la intersección de las rectas $x - y + 5 = 0$, $x + y + 1 = 0$, además es tangente a la recta $6x - 3y - 15 = 0$.



Actividad: 5 (continuación)

2. Dos circunferencias concéntricas cuyo centro es el punto $C(-4, 7)$, cada una de ellas es tangente a uno de los ejes coordenados.



Evaluación		
Actividad: 5	Producto: Problemas de aplicación y gráficas.	Puntaje:
Saberes		
Conceptual	Procedimental	Actitudinal
Reconoce las fórmulas de área y longitud de la circunferencia, que se utilizan para resolver problemas cotidianos. Identifica los elementos para trazar la gráfica de la circunferencia.	Aplica las fórmulas de área y longitud de la circunferencia, para resolver problemas cotidianos. Grafica circunferencias con diferentes condiciones.	Aporta puntos de vista personales con apertura y considera los de otras personas. Propone formas creativas para solucionar problemas.

Coevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente	

Secuencia didáctica 2.
Ecuación de la circunferencia.

Inicio

Actividad: 1

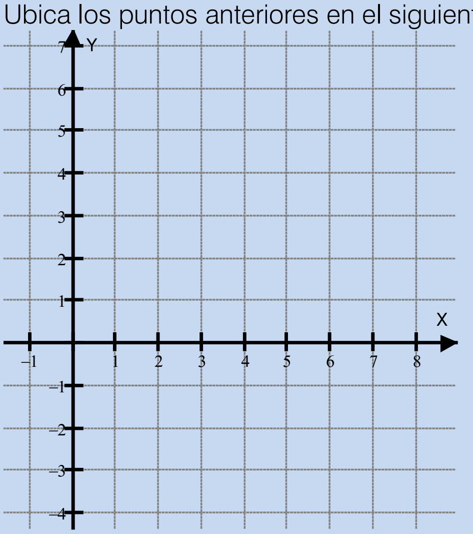
Responde lo que pide:

1. Despeja la variable "y" de la ecuación $(x-4)^2+(y-1)^2=16$, para obtener lo que solicita en los incisos posteriores.

a) Sustituye los valores de "x" para completar la tabla y obtener los puntos correspondientes a la circunferencia

x	y
0	
2	
4	
6	
8	

b) Ubica los puntos anteriores en el siguiente plano, para que traces la gráfica.



c) ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la circunferencia?, ¿Cuál es su radio?

d) ¿Cómo relacionas el centro y el radio con la ecuación de la circunferencia?

e) Desarrolla los binomios de la ecuación dada, para obtener la ecuación general de la circunferencia.

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 1</td><td colspan="3">Producto: Gráfica y cuestionario.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Reconoce elementos de la circunferencia.</td><td colspan="3">Obtiene elementos de la circunferencia.</td><td colspan="2">Muestra disposición para realizar la actividad.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

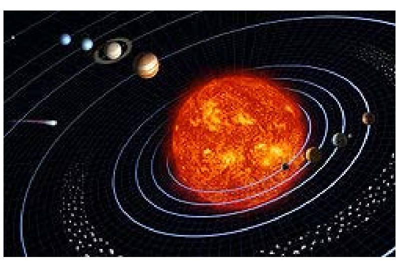
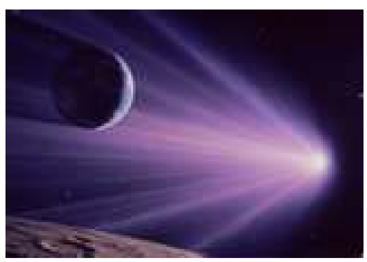
Desarrollo

Circunferencia con centro en el origen.

En bloques anteriores, se ha visto la importancia de obtener la representación analítica de los lugares geométricos, como la recta, ya que ésta se convierte en una herramienta básica para obtener cualquier punto que esté en ellos.

En el caso de la circunferencia, existen una variedad de aplicaciones para las cuales es necesario conocer su representación analítica, como por ejemplo:

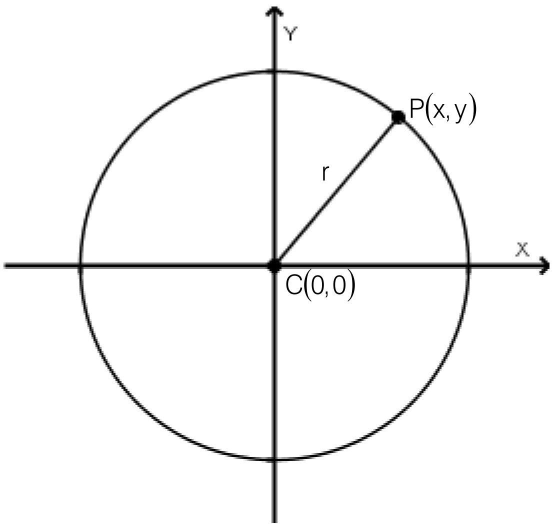
En Astronomía es importante establecer las trayectorias de planetas, satélites naturales, cometas, entre otros astros, los cuales en su mayoría describen trayectorias circulares o elípticas. Conociendo la ecuación se puede predecir en qué momento pasará un cuerpo celeste por un punto dado y así establecer eventos importantes cómo eclipses, avistamientos de cometas y colisiones entre ellos.

También cuando una nación coloca un satélite en órbita, primero requiere establecer y programar la trayectoria que seguirá y para ello se utilizan las representaciones analíticas.


Para obtener la ecuación de la circunferencia, es necesario partir de la *definición*, la cual dice: es el lugar geométrico del conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Suponiendo que el centro es el origen y tomando un punto cualquiera del lugar geométrico $P(x, y)$, el radio se determina por la distancia entre ambos.



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$r = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Acomodando este resultado, se obtiene la *forma canónica* de la circunferencia.

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

Como ya se había mencionado anteriormente, la función principal de la ecuación es conocer los puntos que pertenecen a la circunferencia; una vez obtenida la ecuación, también se puede verificar si algún punto le pertenece o no a ella, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.

Verificar si los puntos $A(5,1)$, $B(-4,3)$ y $D(2,\sqrt{21})$ pertenecen a la circunferencia con centro en el origen y radio 5.

Para obtener la ecuación de la circunferencia se utiliza la forma canónica.

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = (5)^2$$
$$x^2 + y^2 = 25$$
$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

Ahora, se sustituye las coordenadas de los puntos dados, para verificar si satisface la ecuación.

Para $A(5,1)$:

$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$
$$(5)^2 + (1)^2 - 25 = 0$$
$$25 + 1 - 25 = 0$$
$$1 \neq 0$$

El punto A no pertenece a la circunferencia.

Para $B(-4,3)$:

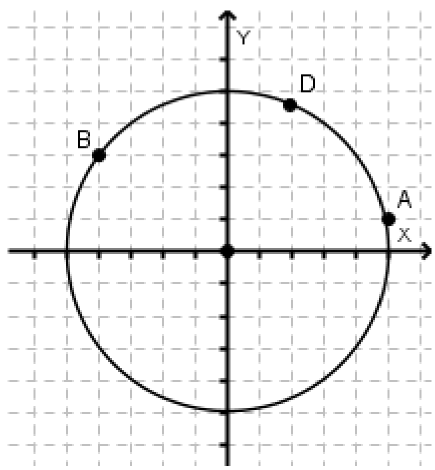
$$x^2+y^2-25=0$$
$$(-4)^2+(3)^2-25=0$$
$$16+9-25=0$$
$$0=0$$

El punto B pertenece a la circunferencia.

Para $D\left(2,\sqrt{21}\right)$:

$$x^2+y^2-25=0$$
$$(2)^2+\left(\sqrt{21}\right)^2-25=0$$
$$4+21-25=0$$
$$0=0$$

El punto D pertenece a la circunferencia.

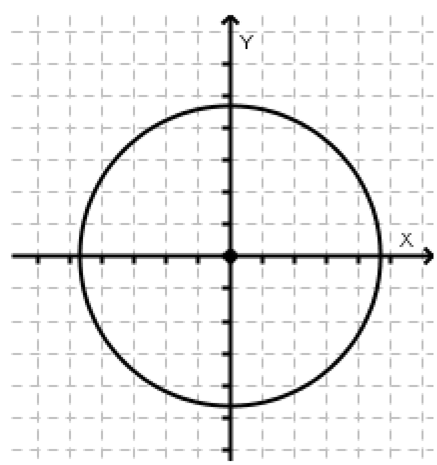


Los siguientes ejemplos se relacionan con la ecuación de la circunferencia, dadas ciertas condiciones.

Ejemplo 2.

Obtener la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el origen y su radio es $\frac{14}{3}$.

$$x^2+y^2=r^2$$
$$x^2+y^2=\left(\frac{14}{3}\right)^2$$
$$x^2+y^2=\frac{196}{9}$$
$$9x^2+9y^2-196=0$$



Ejemplo 3.

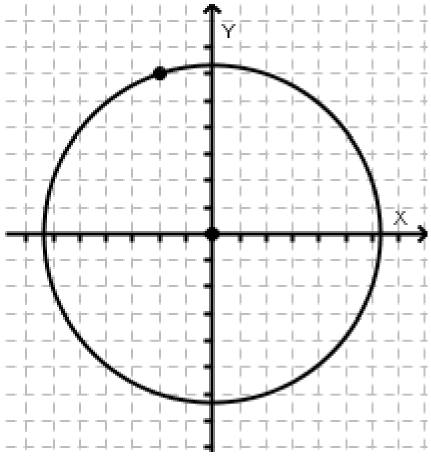
Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el origen y pasa por el punto $(-2,6)$.

Se obtiene el radio calculando la distancia entre el origen y el punto dado.

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$r=\sqrt{(-2-0)^2+(6-0)^2}$$
$$r=\sqrt{4+36}$$
$$r=\sqrt{40}$$

Posteriormente se obtiene la ecuación.

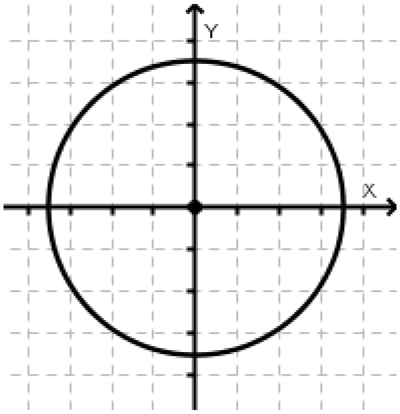
$$x^2+y^2=r^2$$
$$x^2+y^2=\left(\sqrt{40}\right)^2$$
$$x^2+y^2=40$$
$$x^2+y^2-40=0$$



Ejemplo 4.

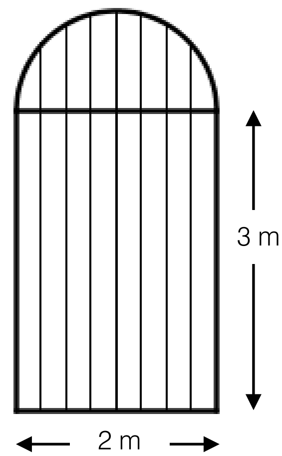
En un carrusel infantil, Miguel se pasea en un caballo ubicado a 3.5 m de distancia del centro. Calcular la ecuación que representa su trayectoria.

$$x^2+y^2=r^2$$
$$x^2+y^2=(3.5)^2$$
$$x^2+y^2=12.25$$
$$x^2+y^2-12.25=0$$

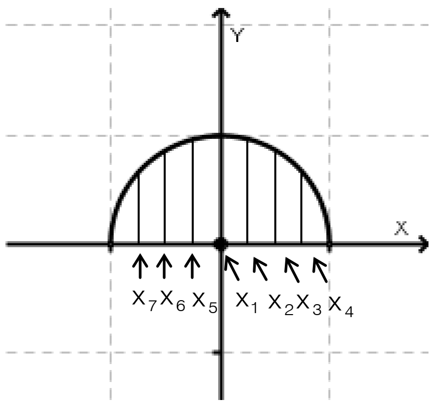


Ejemplo 5.
Cesar diseñó una puerta rectangular de herrería coronada con una semicircunferencia, como se muestra en la figura. ¿Qué longitud tiene cada una de las barras interiores de la puerta, si están igualmente espaciadas?

Para conocer la longitud de las barras, se requiere encontrar la altura de la parte correspondiente a la semicircunferencia y sumarle 3 m a cada una de ellas, la cual corresponde a la parte rectangular.



Para lograr lo anterior, se ubica la semicircunferencia en el plano cartesiano con centro en el origen y radio 1.



En el eje horizontal se nombró la coordenada que corresponde a cada una de las barras; sólo se necesita calcular las alturas de la barras correspondientes a x_2, x_3 y x_4, puesto que x_1 tiene longitud 1 m por ser el radio de la semicircunferencia , y además x_5, x_6 y x_7 por simetría serían igual a x_2, x_3 y x_4.

La ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = (1)^2$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

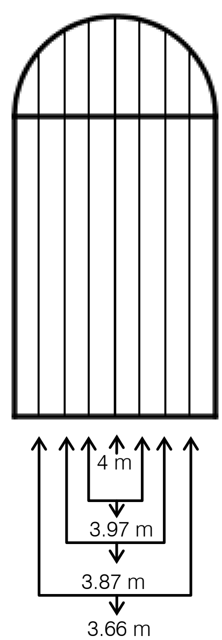
Ahora se despeja la variable "y" para sustituir los valores de "x" correspondientes a las barras, las cuales son: $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$ y $x_3 = 0.75$.

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Para $x_1 = 0.25$
$$y = \sqrt{1 - (0.25)^2}$$
$$y \approx 0.97$$

Para $x_2 = 0.5$
$$y = \sqrt{1 - (0.5)^2}$$
$$y \approx 0.87$$

Para $x_3 = 0.75$
$$y = \sqrt{1 - (0.75)^2}$$
$$y \approx 0.66$$



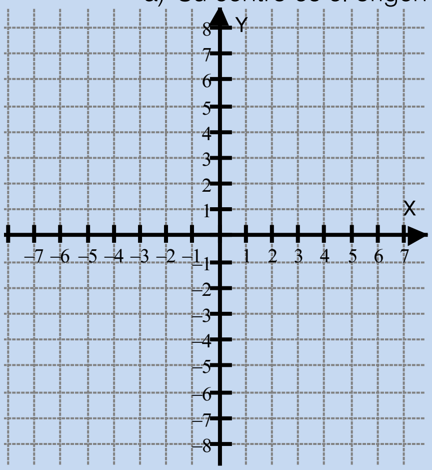
Así que sumando 3 m a cada una de ellas se obtienen las longitudes de las barras como se muestra en el dibujo.

Actividad: 2

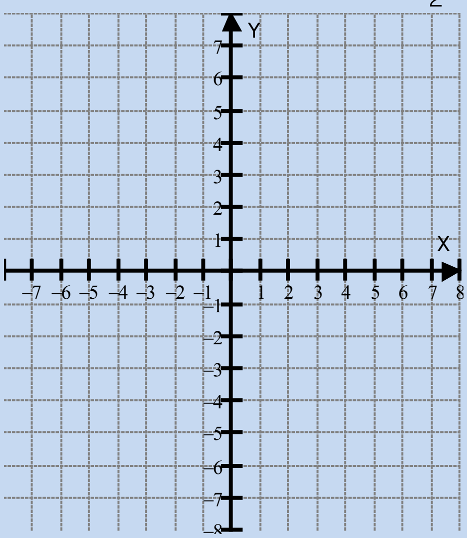
Encuentra lo que se pide en cada sección.

I. Encuentra la ecuación y la gráfica de la circunferencia que cumple con las siguientes condiciones.

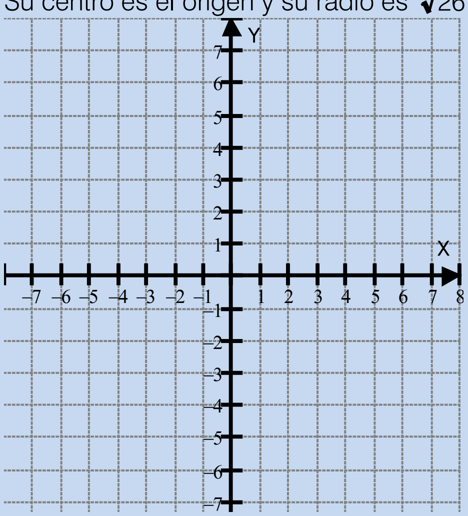
a) Su centro es el origen y tiene radio 6.



b) Su centro es el origen y su radio es $\frac{15}{2}$.

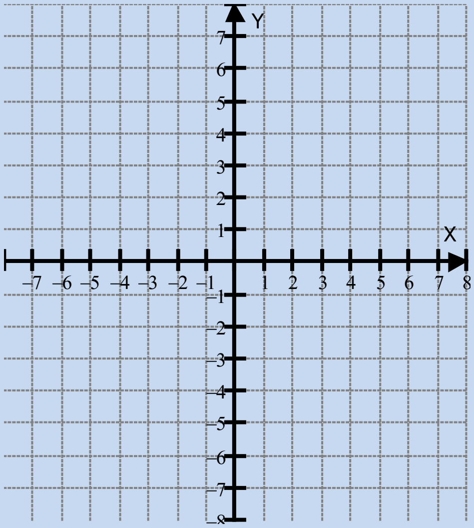


c) Su centro es el origen y su radio es $\sqrt{26}$.

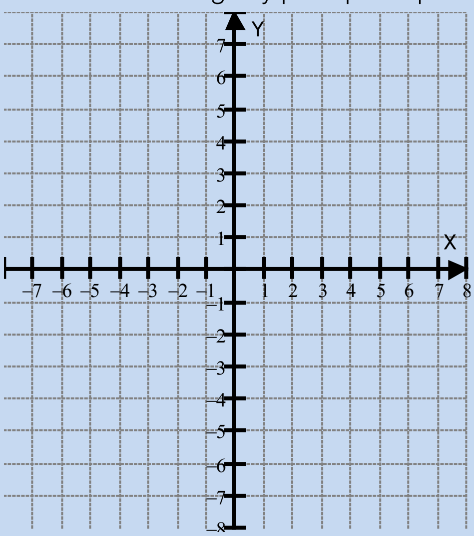


Actividad: 2 (continuación)

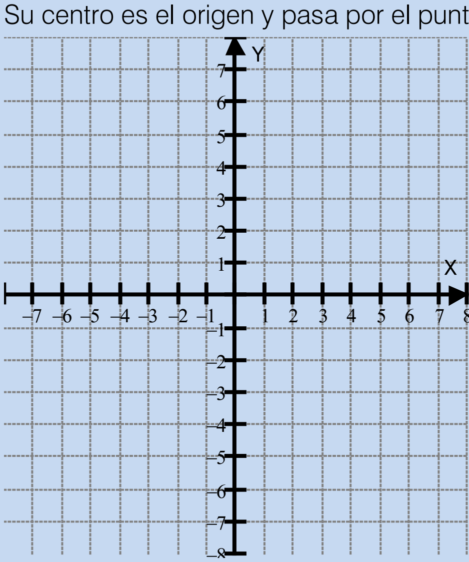
d) Uno de sus diámetros es el segmento cuyos extremos son los puntos $(-7, 2)$ y $(7, -2)$.



e) Su centro es el origen y pasa por el punto $(4, 3)$.

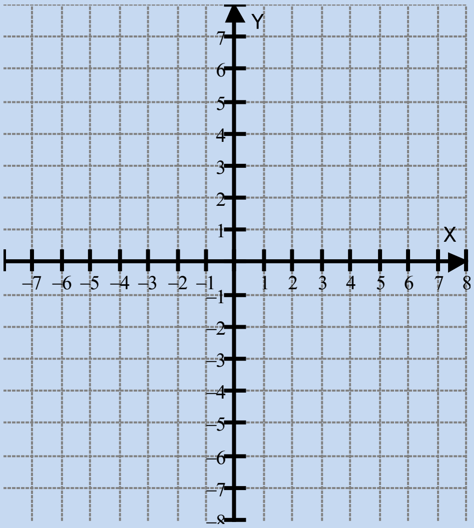


f) Su centro es el origen y pasa por el punto $(-6, -5)$.



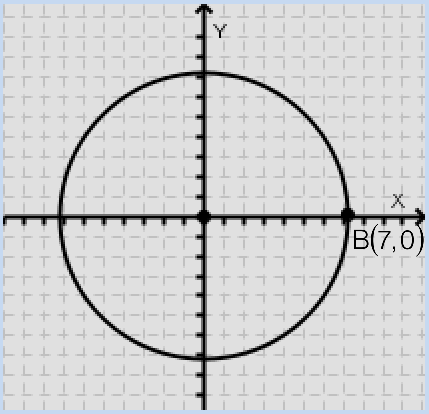
Actividad: 2 (continuación)

g) Su centro es el origen y es tangente a la recta $3x + 2y - 14 = 0$.

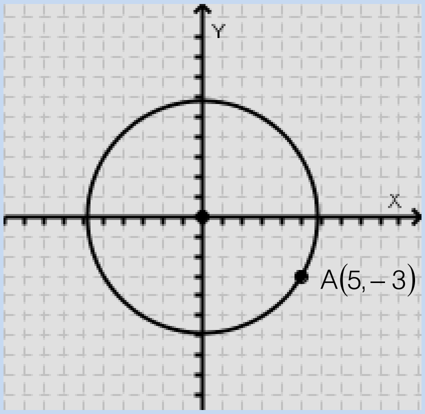


II. Encontrar la ecuación de la circunferencia cuya gráfica es:

a)

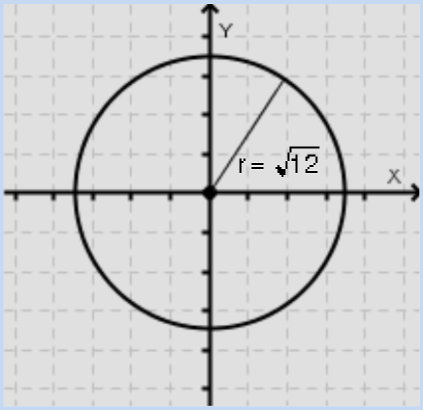


b)

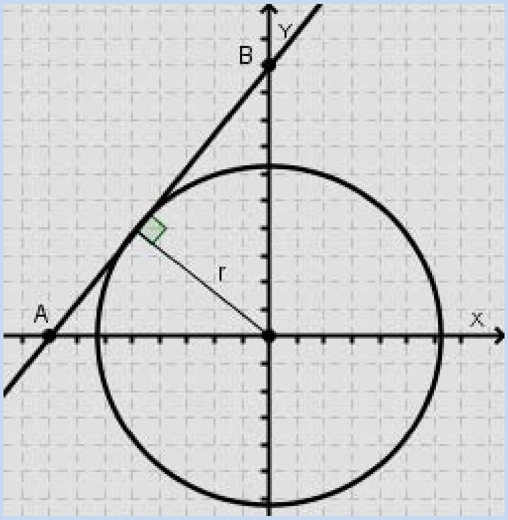


Actividad: 2 (continuación)

c)



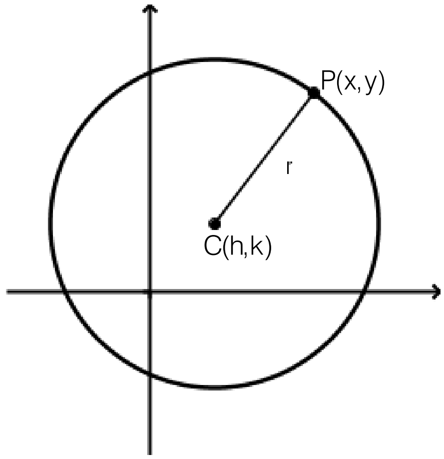
d)



Evaluación					
Actividad: 2	Producto: Ejercicios.			Puntaje:	
Saberes					
Conceptual	Procedimental			Actitudinal	
Identifica los elementos básicos para encontrar la ecuación y la gráfica de circunferencias con centro en el origen.	Calcula ecuaciones de circunferencias con centro en el origen, y realiza la gráfica correspondiente.			Aprecia la facilidad para obtener la ecuación de la circunferencia con centro en el origen.	
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente	

Circunferencia con centro fuera del origen.

Una vez comprendido el lugar geométrico correspondiente a la circunferencia con centro en el origen, se puede obtener la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen, para ello se encontrará la *forma ordinaria* de la circunferencia a partir de su definición y la ayuda que ofrece la fórmula de distancia entre dos puntos; para desarrollar esta forma, se toma como centro de la circunferencia el punto $C(h,k)$ y un punto cualquiera $P(x,y)$ que pertenece a la misma, como se muestra a continuación.



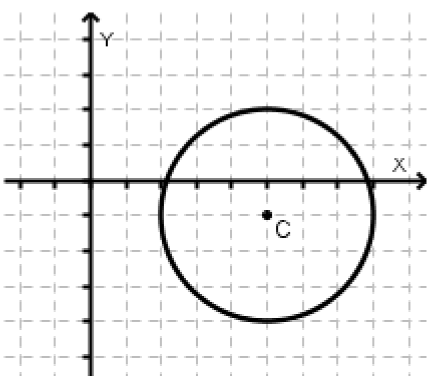
En la gráfica anterior se observa que el radio de la circunferencia es la distancia que existe entre el punto C y P; por lo tanto, utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos se obtiene el radio como se muestra a continuación:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$
$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

Acomodando el resultado, se obtiene *la forma ordinaria de la circunferencia.*

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

Ejemplo 1.
Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(5,-1)$ y su radio es igual a 3.



Considerando que el centro $C(5,-1) = (h,k)$, y el radio es igual a 3, se sustituyen cada uno de éstos en *la forma ordinaria de la circunferencia*.

El binomio al cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-5)^2 + (y+1)^2 = (3)^2$$

Desarrollando los binomios al cuadrado que están en el primer miembro de la ecuación y elevando al cuadrado el radio, se tiene:

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 = 9$$

Acomodando los términos de la ecuación de acuerdo al grado y de forma descendente, además en orden alfabético, se obtiene *la forma general de la ecuación de la circunferencia*, como se muestra a continuación.

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$$

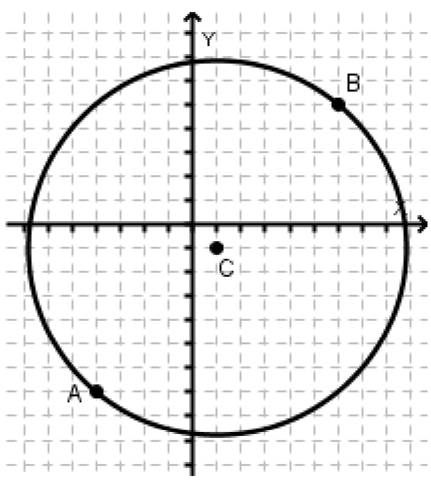
Ejemplo 2.
Encontrar la ecuación de la circunferencia, si uno de sus diámetros es el segmento que tiene como extremos los puntos $A(-4,-7)$ y $B(6,5)$.
Como recordarás, el punto medio del diámetro es el centro de la circunferencia, y para ubicarlo se utiliza la fórmula siguiente fórmula:

$$P_m\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Ahora se asignan las coordenadas de los extremos del diámetro para sustituir la fórmula de punto medio.
$A(-4,-7)=(x_1,\ y_1)$
$B(6,5)=(x_2,\ y_2)$

$$C=P_m\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$
$$C=\left(\frac{-4+6}{2}, \frac{-7+5}{2}\right)$$
$$C=(1,-1)$$

Conocido el centro y cualquier punto por donde pasa la circunferencia, en este caso A o B, se puede trazar la misma y obtener el radio calculado la distancia del centro al punto A o al punto B.



Se tomará el punto A para encontrar el radio.
$A(-4,-7)=(x_1,\ y_1)$
$C(1,-1)=(x_2,\ y_2)$

$$r=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$r=\sqrt{(1+4)^2+(-1+7)^2}$$
$$r=\sqrt{(5)^2+(6)^2}$$
$$r=\sqrt{61}$$

Para encontrar la ecuación de la circunferencia, sólo se requiere sustituir las coordenadas del centro y el radio en la forma ordinaria.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-1)^2+(y+1)^2=\left(\sqrt{61}\right)^2$$
$$x^2-2x+1+y^2+2y+1=61$$
$$x^2+y^2-2x+2y-59=0$$

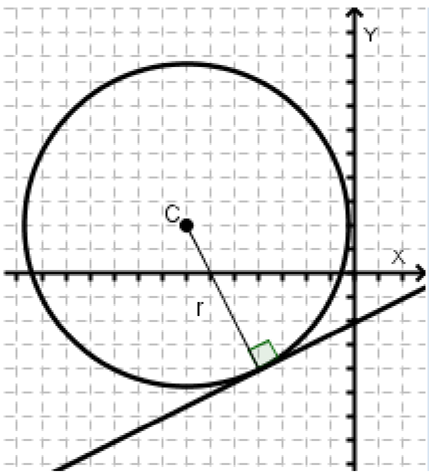
Se puede comprobar que la ecuación obtenida es la que describe el problema, validándola con uno de los puntos por donde pasa, en esta ocasión se utilizará el punto $B(6,5)$ para hacerlo, si B satisface la ecuación, entonces ésta es la correcta.

$$x^2+y^2-2x+2y-59=0$$
$$(6)^2+(5)^2-2(6)+2(5)-59=0$$
$$36+25-12+10-59=0$$
$$0=0$$

Ejemplo 3.
Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(-7,2)$ y es tangente a la recta $x-2y-4=0$.
Primero se grafica la recta y la circunferencia como se hizo en la secuencia anterior.

$x-2y-4=0$

$m=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $b=-\frac{-4}{-2}=-2$



A continuación se obtiene el radio, el cual es la distancia del centro a la recta tangente, y se logra mediante la siguiente fórmula:

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

Recordando que los coeficientes A, B y C son los de la recta tangente y las coordenadas x_1 y y_1 son las coordenadas del centro.

$A=1$
$B=-2$
$C=-4$
$x_1=-7$
$y_1=2$

$$r=d=\left|\frac{(1)(-7)+(-2)(2)-4}{\pm\sqrt{(1)^2+(-2)^2}}\right|$$
$$r=\left|\frac{-7-4-4}{\sqrt{1+4}}\right|$$
$$r=\left|\frac{-15}{\sqrt{5}}\right|=\frac{15}{\sqrt{5}}$$

Si se racionaliza el resultado del radio, queda $r = 3\sqrt{5}$.

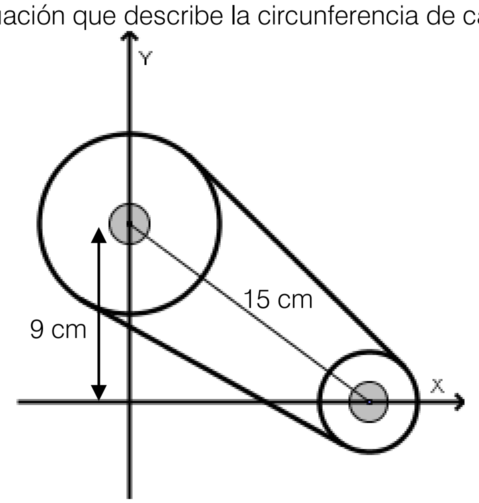
Ya sea que se sustituya el radio racionalizado o no, la ecuación tiene que ser la misma. A continuación se sustituye el centro y el radio en la forma ordinaria de la circunferencia.

$C(-7,2) = (h,k)$

$r = 3\sqrt{5}$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x+7)^2 + (y-2)^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2$$
$$x^2 + 14x + 49 + y^2 - 4y + 4 = (3)^2\left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$x^2 + y^2 + 14x - 4y + 53 = (9)(5)$$
$$x^2 + y^2 + 14x - 4y + 53 = 45$$
$$x^2 + y^2 + 14x - 4y + 8 = 0$$

Ejemplo 4.
Un sistema de dos poleas se describe en la siguiente gráfica, la polea mayor tiene un radio de 4.5 cm y el radio de la menor es de 2.5 cm. Determinar la ecuación que describe la circunferencia de cada polea.



Para encontrar la ecuación de cada una de las poleas, primero se tiene que conocer el centro de ellas, dado que los radios de ambas son conocidos.

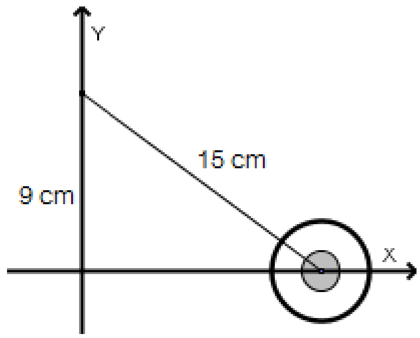
El centro de la polea mayor es sencillo de ubicarlo en la gráfica, éste es el punto $(0,9)$ y su radio es de 4.5, por lo tanto la ecuación es:

$C(0,9) = (h,k)$

$r = 4.5$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-0)^2 + (y-9)^2 = (4.5)^2$$
$$x^2 + y^2 - 18y + 81 = 20.25$$
$$x^2 + y^2 - 18y + 60.75 = 0$$

En el caso de la polea menor, primero se tiene que encontrar la coordenada horizontal del centro y ésta se puede conocer aplicando el Teorema de Pitágoras del triángulo que se forma con ambas poleas.



$$cat^2 + cat^2 = hip^2$$
$$(9)^2 + (cat)^2 = (15)^2$$
$$cat^2 = 225 - 81$$
$$cat = \sqrt{144}$$
$$cat = 12$$

Por lo tanto, el centro de la polea menor es $(12,0)$, y como el radio es 2.5, la ecuación es:

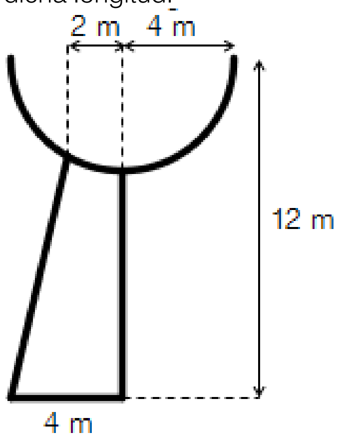
$C(12,0) = (h,k)$

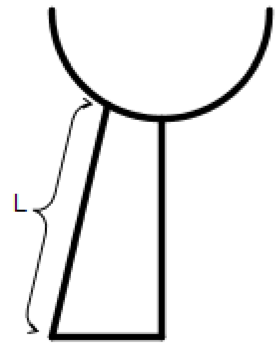
$r = 2.5$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-12)^2 + (y-0)^2 = (2.5)^2$$
$$x^2 - 24x + 144 + y^2 = 6.25$$
$$x^2 + y^2 - 24x + 137.75 = 0$$

Ejemplo 5.

Un arquitecto diseña un pebetero que presentará en un concurso, el cual, en su parte superior tiene forma de semicircunferencia (en la figura se muestra el diseño y algunas dimensiones), sólo le falta encontrar la longitud del soporte que está inclinado. Calcular dicha longitud.

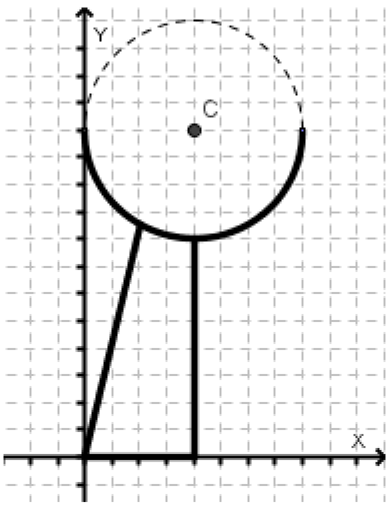




La solución a este problema se basa en encontrar el punto de la semicircunferencia que pertenece también al segmento (L), del cual se desea conocer la longitud, para ello es necesario encontrar la ecuación de la circunferencia.

Una vez conocido el punto, se utiliza la fórmula de distancia para encontrar la longitud deseada.

Para conocer la ecuación de la circunferencia, se ubica el dibujo en el plano cartesiano, como se muestra en la siguiente gráfica.



En ella se ubica el centro de la circunferencia, el cual es el punto $(4,12)$; como el radio es de longitud 4, la ecuación se obtiene de la siguiente manera:

$C(4,12) = (h,k)$
$r = 4$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-4)^2 + (y-12)^2 = (4)^2$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 24y + 144 = 16$$
$$x^2 + y^2 - 8x - 24y + 144 = 0$$

Ahora se sustituye en la variable "x" el valor de 2, que es el único valor que se conoce de la coordenada del punto que se busca; una vez sustituido, se encuentra el valor de "y" correspondiente, utilizando la fórmula general, ya que se obtiene una ecuación de segundo grado con una incógnita.

$$x^2 + y^2 - 8x - 24y + 144 = 0$$
$$(2)^2 + y^2 - 8(2) - 24y + 144 = 0$$
$$y^2 - 24y + 132 = 0$$

$A = 1$
$B = -24$
$C = 132$

$$y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$
$$y = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(1)(132)}}{2(1)}$$
$$y = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 528}}{2}$$
$$y = \frac{24 \pm \sqrt{48}}{2}$$

Los dos valores de "y" son:

$$y_1 = \frac{24 + \sqrt{48}}{2} = \frac{24 + 4\sqrt{3}}{2} = \frac{24}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{2} = 12 + 2\sqrt{3} \approx 15.46 \qquad y_2 = \frac{24 - \sqrt{48}}{2} = \frac{24 - 4\sqrt{3}}{2} = \frac{24}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{2} = 12 - 2\sqrt{3} \approx 8.54$$

Observando la gráfica anterior, la coordenada que se busca es la de y_2, porque es la correspondiente a la semicircunferencia inferior, por lo tanto. el punto de la semicircunferencia que se pretendía obtener es: $(2,\ 12 - 2\sqrt{3})$. Por último, se obtiene la distancia de éste al origen, la cual proporciona la longitud deseada.

$$L = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$L = \sqrt{(2-0)^2 + \left(12 - 2\sqrt{3} - 0\right)^2}$$
$$L = \sqrt{(2)^2 + \left(12 - 2\sqrt{3}\right)^2}$$
$$L \approx \sqrt{4 + 72.86} = 8.77$$

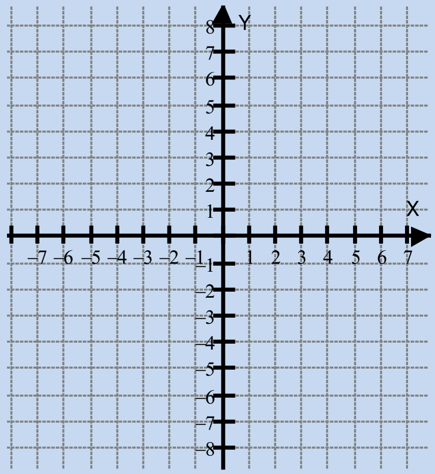
La longitud del soporte inclinado, es aproximadamente 8.77 m.

Actividad: 3

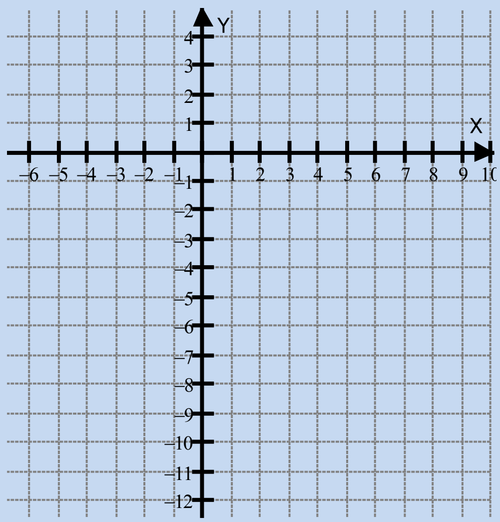
Encuentra lo que se pide en cada sección.

I. Encuentra la ecuación y la gráfica de la circunferencia que cumple con las siguientes condiciones.

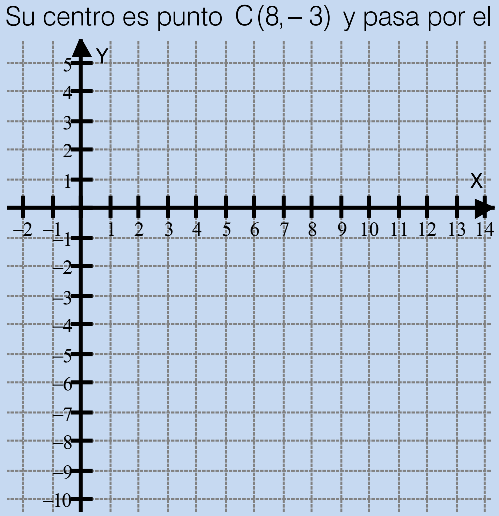
a) Su centro es punto $C(-3,5)$ y tiene radio 5.



b) Su centro es punto $C(1,-4)$ y su radio es $\frac{\sqrt{150}}{2}$.

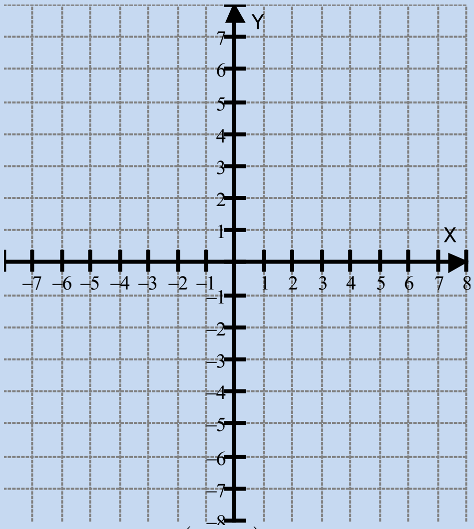


c) Su centro es punto $C(8,-3)$ y pasa por el punto $A(4,1)$.

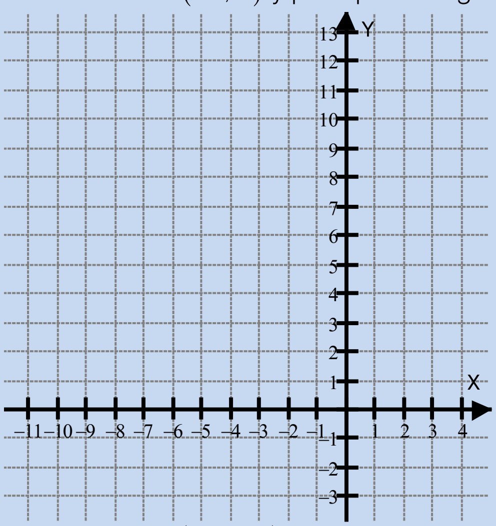


Actividad: 3 (continuación)

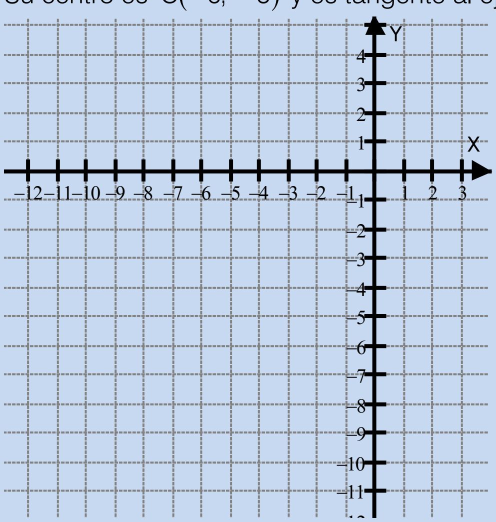
d) Uno de sus diámetros es el segmento cuyos extremos son los puntos $L(7, 6)$ y $M(-4, -6)$.



e) Su centro es $C(-5, 7)$ y pasa por el origen.

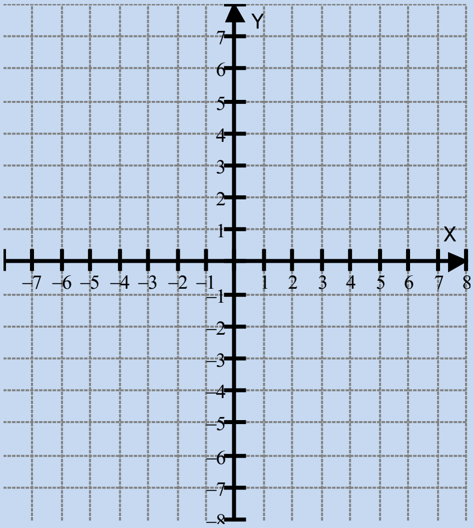


f) Su centro es $C(-6, -5)$ y es tangente al eje X.



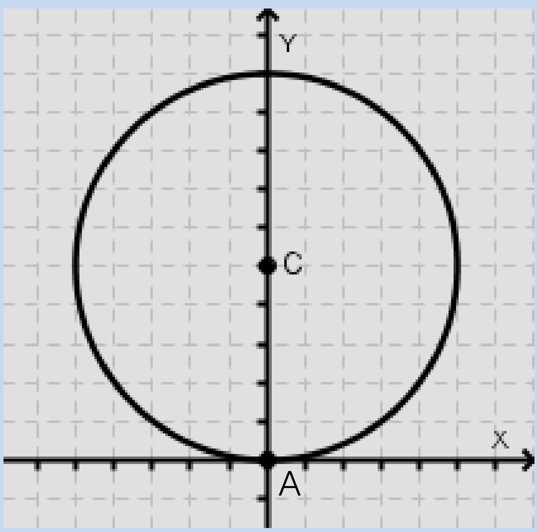
Actividad: 3 (continuación)

g) Su centro es $C(5, 7)$ y es tangente a la recta $6x + 2y - 9 = 0$.

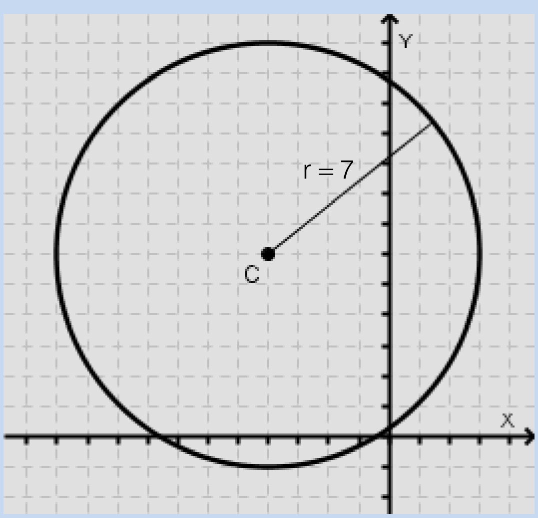


II. Encontrar la ecuación de la circunferencia cuya gráfica es:

a)

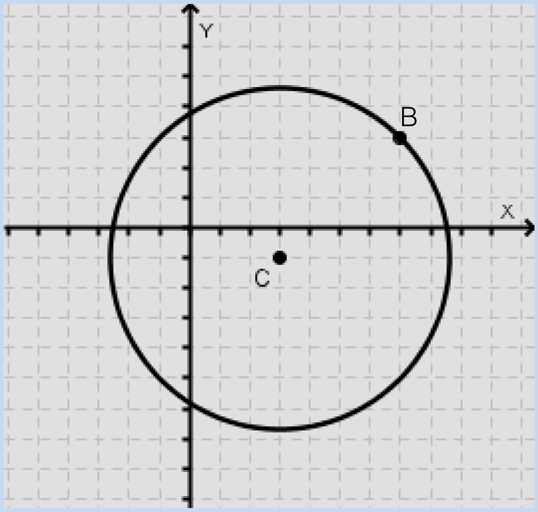


b)

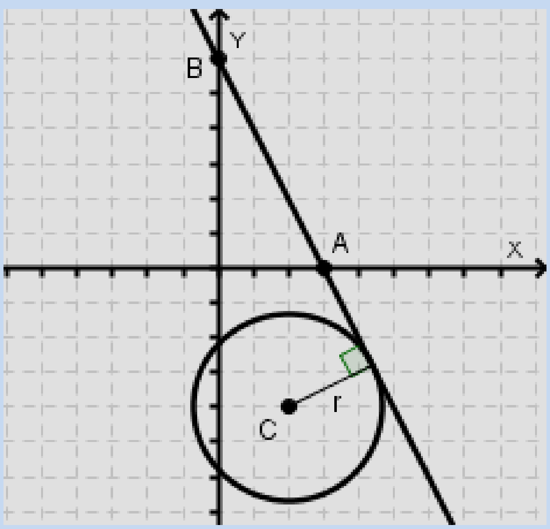


Actividad: 3 (continuación)

c)



d)



Evaluación						
Actividad: 3	Producto: Ejercicios.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Reconoce la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen a partir de las coordenadas de su centro y la medida de su radio.	Determina la ecuación ordinaria de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y la medida de su radio.			Reconoce la necesidad de sus habilidades algebraicas previas para la obtención del centro y radio en los casos que no se proporcionan directamente, con el fin de obtener la ecuación de la circunferencia.		
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

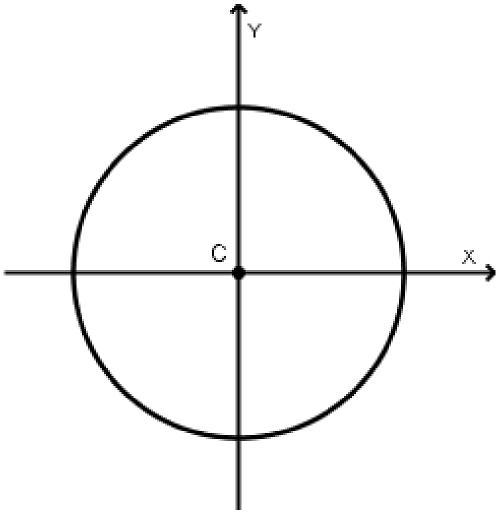
Ecuación general de la circunferencia.

Las ecuaciones de las curvas cónicas se expresan mediante $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, y como habrás notado en cada una de las ecuaciones obtenidas anteriormente, A y B son iguales, además su valor es 1; también habrás visto que el término Cxy no se encuentra en la ecuación de la circunferencia, por lo que se concluye que C=0; así que la ecuación general de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

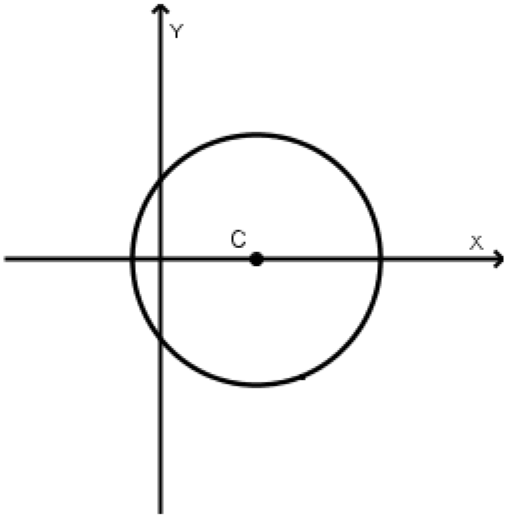
Haciendo un análisis de las condiciones en las que se obtuvieron las ecuaciones anteriores, podrás comprobar, que si:

a) Se tiene un circunferencia con centro en el origen, su ecuación es:



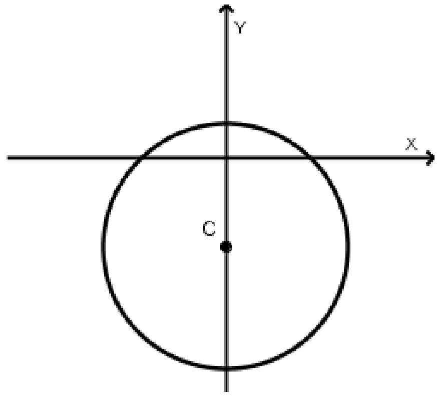
$$x^2 + y^2 + F = 0$$

b) Se tiene una circunferencia con centro en el eje X, su ecuación es:



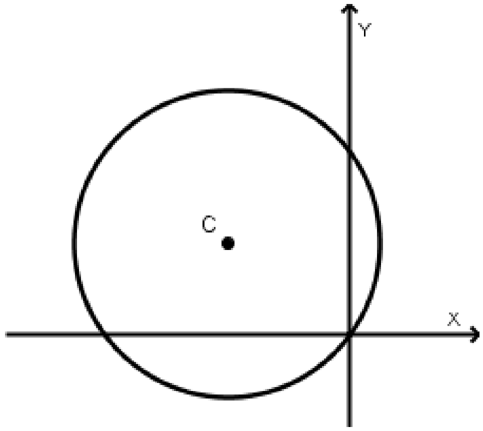
$$x^2 + y^2 + Dx + F = 0$$

c) Se tiene una circunferencia con centro en el eje Y, su ecuación es:



$$x^2 + y^2 + Ey + F = 0$$

d) Se tiene una circunferencia que pasa por el origen, su ecuación es:



$$x^2 + y^2 + Dx + Ey = 0$$

Como habrás notado, en cada uno de los casos anteriores, D, E o F, puede ser cero, pero nunca serán ceros los coeficientes de los términos cuadráticos, en ese caso no se tendría la ecuación de una circunferencia sino de una recta.

Uno de los aspectos más importantes dentro de la aplicación de la circunferencia, una vez conocida la ecuación, es obtener el centro y el radio, para ello, es necesario utilizar el método de factorización de *Completar Trinomio Cuadrado Perfecto*; para entender mejor este método se analizará la forma en que se obtuvo la ecuación de la circunferencia conocido el centro y el radio, y esto se hará mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.
Obtener la ecuación de la circunferencia si su centro es el punto $C(3, -1)$ y de radio 4.
La solución de este problema se planteará en la siguiente tabla.

Transformación de la forma ordinaria a la ecuación de la circunferencia.	Descripción
$(x-3)^2 + (y+1)^2 = (4)^2$	Se expresa la forma ordinaria, sustituyendo el centro y el radio de la circunferencia.
$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) = (16)$	Dentro de los paréntesis están desarrollados los binomios del primer miembro de la ecuación y el radio en el segundo miembro de la ecuación.
$x^2 - 6x + y^2 + 2y = 16 - 9 - 1$	Se envían las constantes al segundo miembro de la ecuación.
$x^2 + y^2 - 6x + 2y = 6$	Se acomodan las variables de acuerdo al grado y en orden alfabético.
$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$	Se iguala a cero la ecuación, enviando la constante al primer miembro de la ecuación.

En la tabla se hicieron más pasos de los que estás acostumbrado(a), esto es con el objetivo de entender el proceso inverso, como se verá a continuación.

Ejemplo 2.
Dada la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$, obtener el centro y radio de la misma.

Transformación de la ecuación de la circunferencia a la forma ordinaria.	Descripción
$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$	Se tiene la ecuación de la circunferencia.
$x^2 + y^2 - 6x + 2y = 6$	Se envía la constante al otro lado de la igualdad.
$\left[x^2 - 6x\right] + \left[y^2 + 2y\right] = 6$	Se acomodan las variables de tal manera que queden las mismas literales juntas.
$\left[x^2 - 6x + (-3)^2\right] + \left[y^2 + 2y + (1)^2\right] = 6 + (-3)^2 + (1)^2$	Se completa el trinomio cuadrado perfecto, añadiendo a cada binomio, la mitad del término lineal elevado al cuadrado, esto también se debe de añadir al lado derecho de la ecuación para que no se altere la misma.
$\left[x^2 - 6x + 9\right] + \left[y^2 + 2y + 1\right] = 16$	Se expresan los trinomios cuadrados perfectos.
$(x-3)^2 + (y+1)^2 = (4)^2$	Se factorizan los trinomios y se expresan los binomios al cuadrados, así como el radio.
$(x-3)^2 + (y+1)^2 = (4)^2$	Se expresa la forma ordinaria, sustituyendo el centro y el radio de la circunferencia.
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	Se comparan las formas ordinarias para así poder obtener el centro y el radio.
$C(3, -1)$ y el radio es 4.	

Por supuesto que estos pasos se pueden reducir dependiendo de tu habilidad algebraica; también podrás utilizar las fórmulas directas para la obtención del centro y el radio, una vez conocida la ecuación de la circunferencia. Estas fórmulas las conocerás al finalizar el mismo proceso que se realizó en el ejemplo anterior, sólo que se utilizará la ecuación general.

A continuación se establecerá el procedimiento para la obtención de las fórmulas que proporcionan el centro y el radio, si se conoce la ecuación de la circunferencia.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$x^2 + y^2 + Dx + Ey = -F$$
$$\left[x^2 + Dx\right] + \left[y^2 + Ey\right] = -F$$
$$\left[x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right] + \left[y^2 + Ey + \left(\frac{E}{2}\right)^2\right] = -F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$
$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

De la forma ordinaria anterior, se deduce que el centro y radio es:

$$C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \qquad r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}}$$

Ejemplo 3.

Encontrar el centro y el radio de la circunferencia que tiene como ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$.

Utilizando las fórmulas, se obtiene:

$D = -2$

$E = -6$

$F = 6$

$$C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

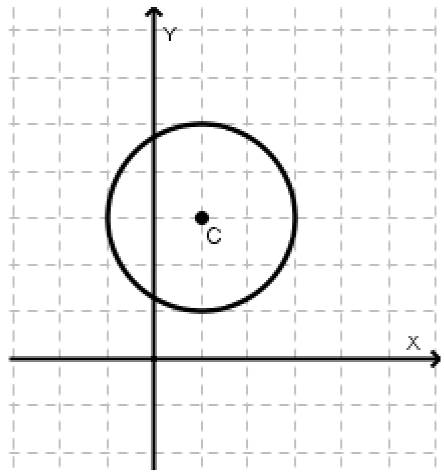
$$C = \left(-\frac{-2}{2}, -\frac{-6}{2}\right)$$

$$C = (1, 3)$$

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(-2)^2 + (-6)^2 - 4(6)}{4}}$$

$$r = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$$



Ejemplo 4.

Encontrar el centro y el radio de la circunferencia que tiene como ecuación $x^2 + y^2 - 18x - 10y + 90 = 0$.

Utilizando las fórmulas, se obtiene:

$D = -18$

$E = -10$

$F = 90$

$$C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

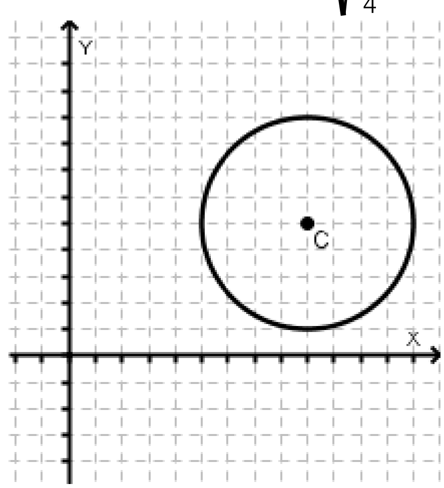
$$C = \left(-\frac{-18}{2}, -\frac{-10}{2}\right)$$

$$C = (9, 5)$$

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(-18)^2 + (-10)^2 - 4(90)}{4}}$$

$$r = \sqrt{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = 4$$

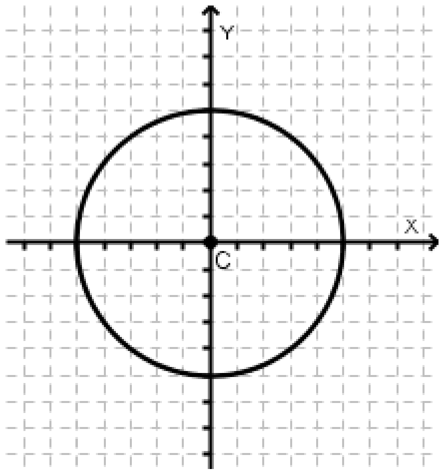


Ejemplo 5.
Encontrar el centro y el radio de la circunferencia que tiene como ecuación $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

En este caso no es necesario sustituir la fórmula, ya que es una circunferencia con centro en el origen, y si se envía la constante al lado derecho de la ecuación se visualiza el radio.

$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$
$$x^2 + y^2 = 25$$

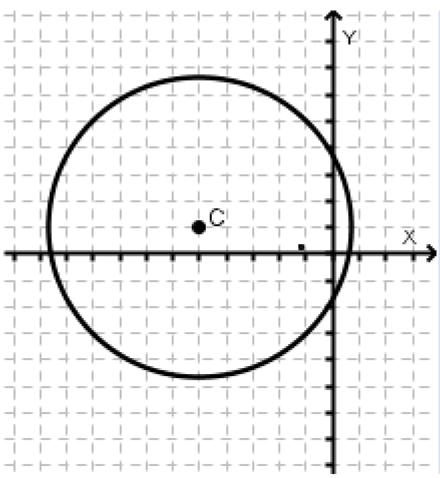
$$C = (0,0) \qquad\qquad r = 5$$



Ejemplo 6.
Encontrar el centro y el radio de la circunferencia que tiene como ecuación $9x^2 + 9y^2 + 90x - 18y - 55 = 0$.

Primero se divide la ecuación entre el coeficiente de los términos cuadráticos, es decir, entre 9, esto con el objetivo de obtener la forma de la ecuación general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

$$\frac{9x^2 + 9y^2 + 90x - 18y - 55}{9} = \frac{0}{9}$$
$$x^2 + y^2 + 10x - 2y - \frac{55}{9} = 0$$



$D = 10$
$E = -2$
$F = -\frac{55}{9}$

$$C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$
$$C = \left(-\frac{10}{2}, -\frac{-2}{2}\right)$$
$$C = (-5,1)$$

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}}$$
$$r = \sqrt{\frac{(10)^2 + (-2)^2 - 4\left(-\frac{55}{9}\right)}{4}}$$
$$r = \sqrt{\frac{\frac{1156}{9}}{4}} = \sqrt{\frac{289}{9}} = \frac{17}{3}$$

Ejemplo 7.

Encontrar el centro y el radio de la circunferencia que tiene como ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$.

$D = -4$

$E = 4$

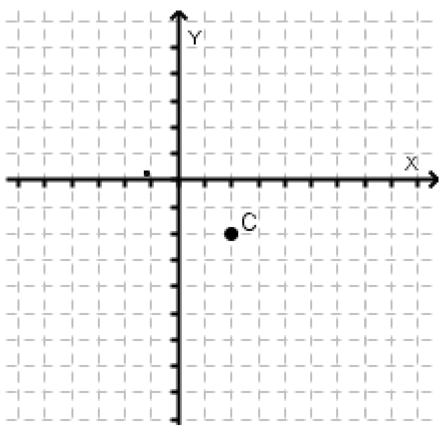
$F = 8$

$$C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \qquad r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}}$$

$$C = \left(-\frac{-4}{2}, -\frac{4}{2}\right) \qquad r = \sqrt{\frac{(-4)^2 + (4)^2 - 4(8)}{4}}$$

$$C = (2, -2) \qquad r = \sqrt{\frac{0}{4}} = 0$$

Como el radio es cero, la gráfica describe un punto, el centro.



Ejemplo 8.

Encontrar el centro y el radio de la circunferencia que tiene como ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 61 = 0$.

$D = -8$

$E = -12$

$F = 61$

$$C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \qquad r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}}$$

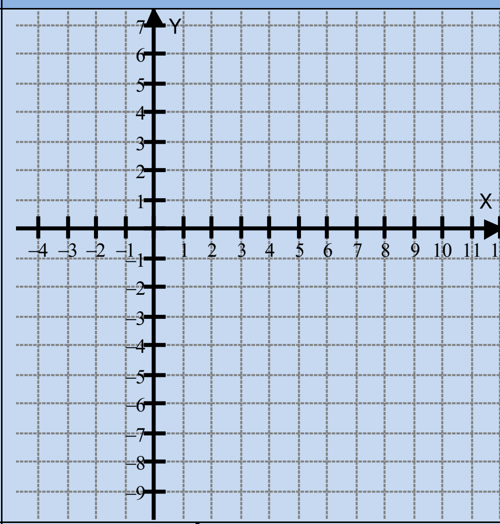
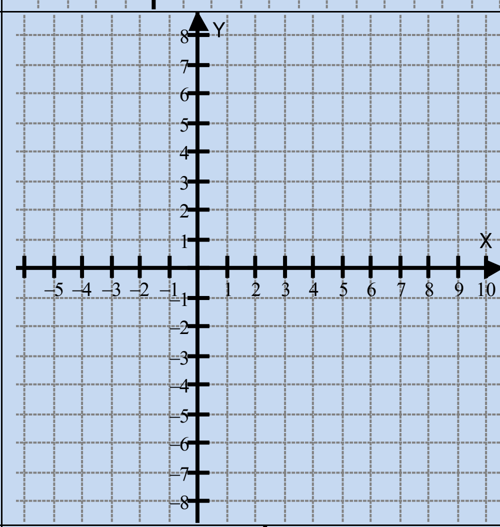
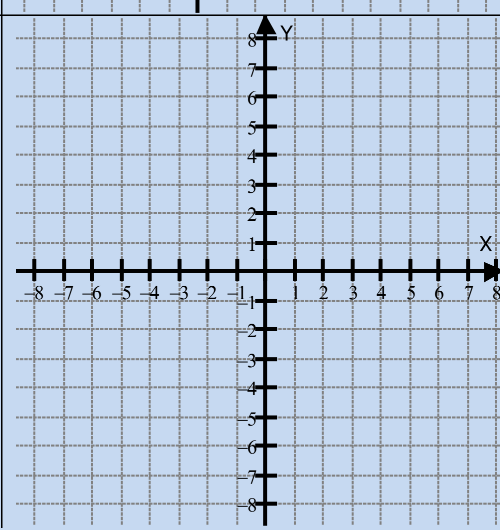
$$C = \left(-\frac{-8}{2}, -\frac{-12}{2}\right) \qquad r = \sqrt{\frac{(-8)^2 + (-12)^2 - 4(61)}{4}}$$

$$C = (4, 6) \qquad r = \sqrt{\frac{-36}{4}} = \sqrt{-9}$$

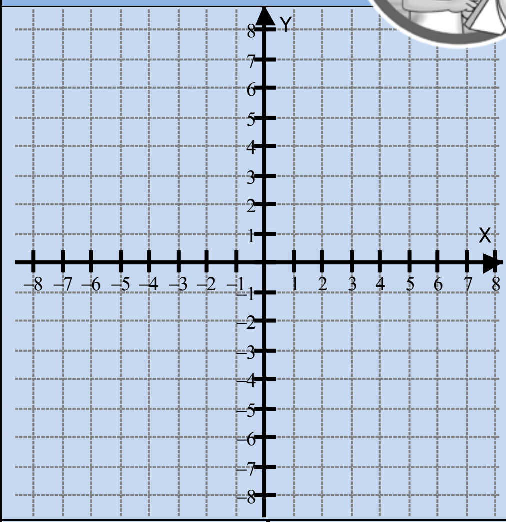
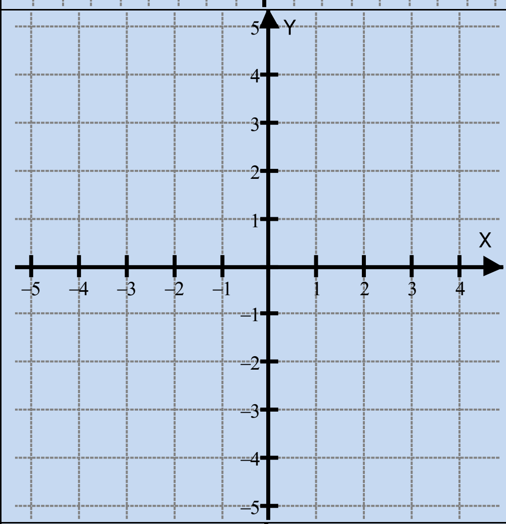
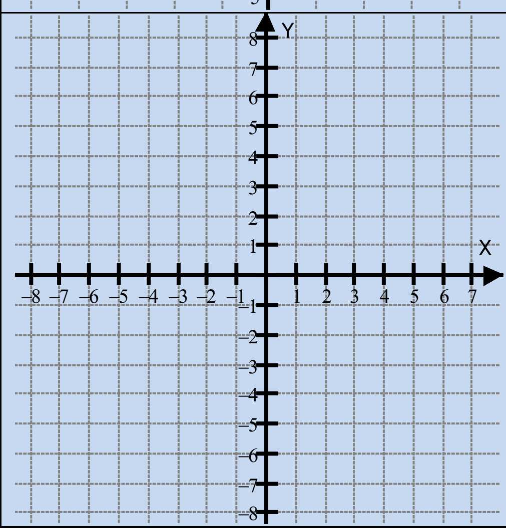
Al ser el radio raíz de un número negativo, esto implica que la circunferencia no existe en los números reales, pero sí en los números complejos, por lo tanto, no se puede trazar la gráfica en el plano cartesiano, porque éste está determinado por los números reales.

Actividad: 4

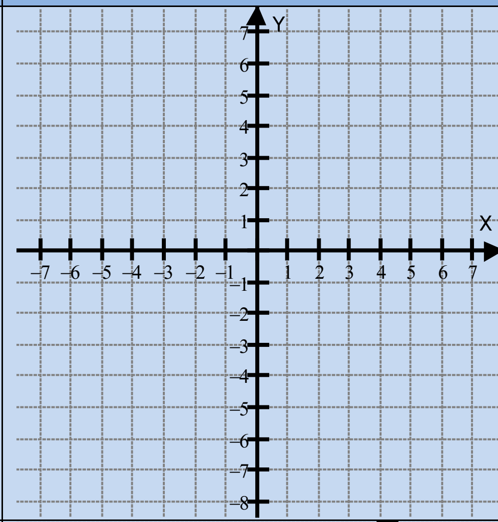
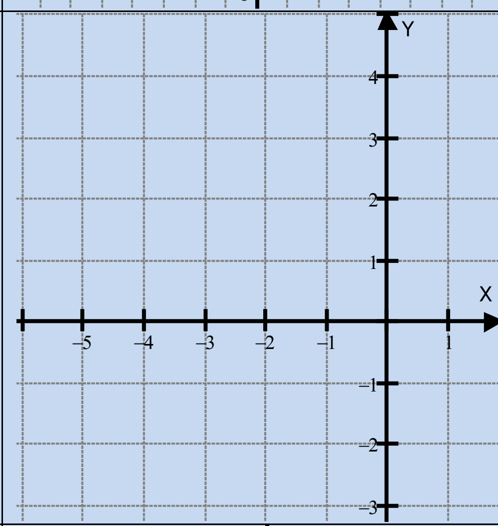
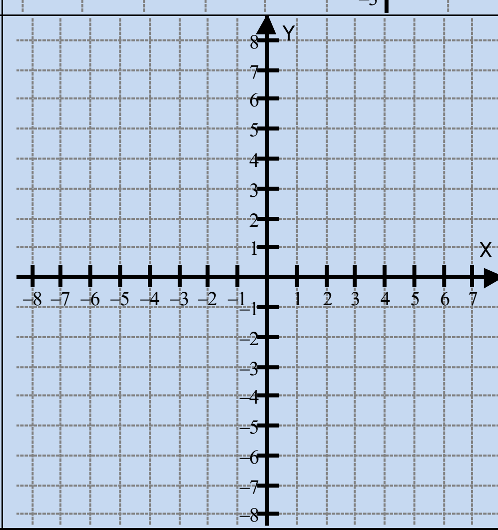
Completa la siguiente tabla.

Ecuación en su forma general	Centro	Radio	Ecuación en su forma ordinaria	Gráfica
$x^2 + y^2 - 10x + 4y - 56 = 0$				
$x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$				
$x^2 + y^2 - 64 = 0$				

Actividad: 4 (continuación)

Ecuación en su forma general	Centro	Radio	Ecuación en su forma ordinaria	Gráfica
$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$				
$9x^2 + 9y^2 - 49 = 0$				
$x^2 + y^2 + 10y - 24 = 0$				

Actividad: 4 (continuación)

Ecuación en su forma general	Centro	Radio	Ecuación en su forma ordinaria	Gráfica
$2x^2+2y^2-6x+10y+7=0$				
$4x^2+4y^2+24x-16y+37=0$				
$x^2+y^2+14x-12y+121=0$				

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 4</td><td colspan="3">Producto: Complementación de la tabla.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica el radio y las coordenadas del centro de una circunferencia a partir de su ecuación.</td><td colspan="3">Obtiene los elementos de una circunferencia a partir de su ecuación.</td><td colspan="2">Muestra interés en realizar la actividad y aprecia la facilidad de las fórmulas en la obtención del centro y radio, para lograr su trazo.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Sitios Web recomendados:

Entra a este sitio para que practiques las ecuaciones de la circunferencia y su gráfica.
http://www.vadenumeros.es/geogebra/geometria/circunferencia.html

Actividad: 5

En equipo contesten los siguientes cuestionamientos.

1. ¿Cuántas circunferencias pasan por un punto? Realiza un bosquejo de su respuesta.

2. ¿Cuántas circunferencias pasan por dos puntos? Realiza un bosquejo de la respuesta.

3. ¿Cuál es el mínimo de puntos que se requieren para trazar una circunferencia? Justifiquen la respuesta.

Actividad: 5 (continuación)

4. Investiguen los métodos algebraicos para encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos, y ejemplifiquen cada uno de ellos.

Actividad: 5 (continuación)

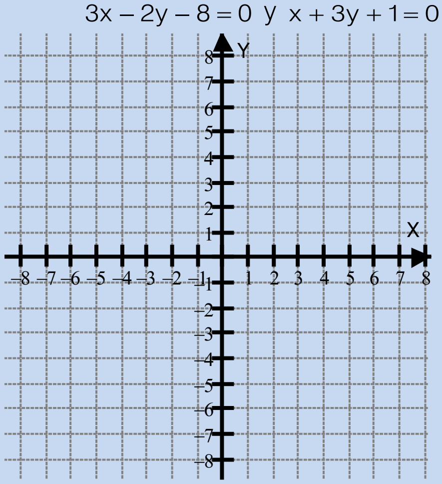
<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 5</td><td colspan="3">Producto: Investigación y cuestionario.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Reconoce los métodos para calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos.</td><td colspan="3">Aplica alguno de los métodos para calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos.</td><td colspan="2">Aporta puntos de vista personales con apertura y considera los de otras personas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

■ Cierre

Actividad: 6

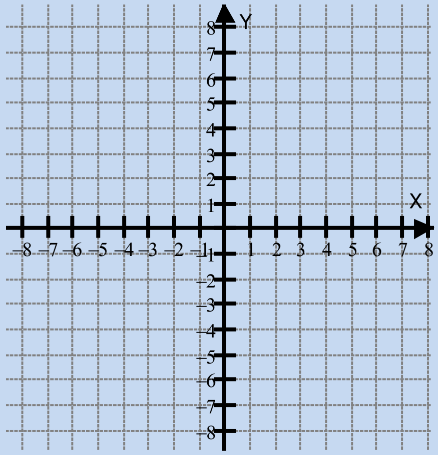
Resuelve los siguientes problemas.

1. Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es la intersección de las rectas $3x - 2y - 8 = 0$ y $x + 3y + 1 = 0$ y es tangente a la recta $x - 5 = 0$.



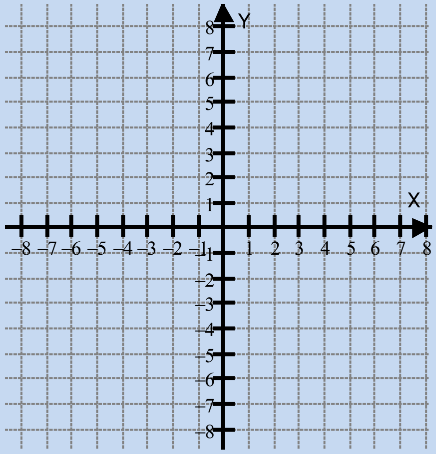
Actividad: 6 (continuación)

2. Encontrar la ecuación de la circunferencia circunscrita en el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(4,6)$, $B(-3,7)$ y $C(3,-1)$.

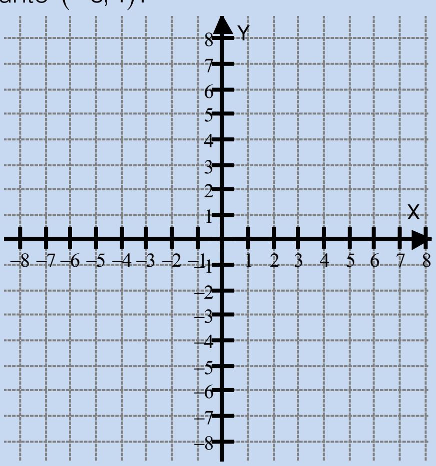


Actividad: 6 (continuación)

3. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de las rectas $x + 3y + 3 = 0$, $x + y + 1 = 0$, y su radio es igual a 6.

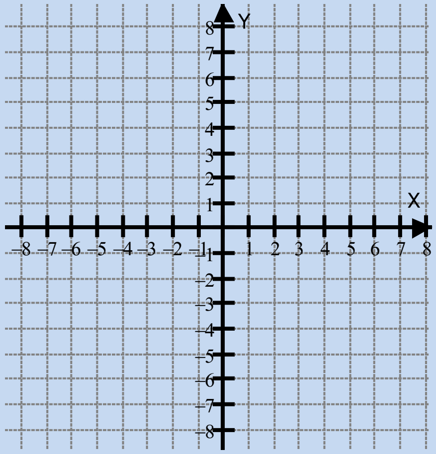


4. Halla la ecuación de la circunferencia concéntrica con la ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ y que pasa por el punto $(-3, 4)$.



Actividad: 6 (continuación)

5. Encuentra la ecuación de la circunferencia si su centro es la intersección de las rectas $x - y + 5 = 0$, $x + y + 1 = 0$, además es tangente a la recta $6x - 3y - 15 = 0$.



6. Un satélite fue puesto en órbita a 150 km de su superficie, si la trayectoria del satélite es circular, y el diámetro de la tierra es de 12756.8 km, ¿cuál es la ecuación que describe el movimiento del satélite

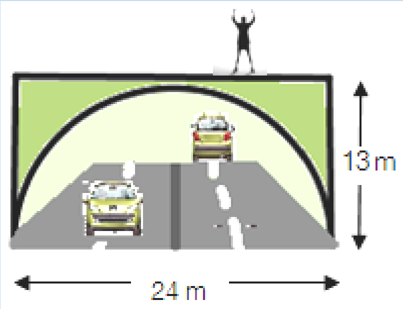
Actividad: 6 (continuación)

7. El soporte de una rueda de la fortuna se encuentra a 6 m del suelo, si ésta tiene un radio de 4 m, ¿cuál es la ecuación que describe su trayectoria?

8. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que describen las canastillas de la rueda de la fortuna que se describe en el problema anterior, si éstas cuelgan a una altura de 1.5 m?

Actividad: 6 (continuación)

9. Un puente con forma de semicircunferencia como soporte, tiene una longitud de 24 m, como muestra la figura; si una persona se encuentra situada a 4 m del centro del puente, ¿a qué altura de la calle se ubica?



Actividad: 6 (continuación)

10. El ojo de un ciclón se encuentra sobre una isla del Caribe, si su trayectoria máxima está descrita por la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 120y - 10800 = 0$, ¿Cuál es la ubicación de la isla en el plano cartesiano?, ¿cuántos kilómetros abarca el radio del ciclón?

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 6</td><td colspan="3">Producto: Problemas de aplicación.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Reconoce los elementos básicos para resolver problemas cotidianos que estén relacionados con la circunferencia.</td><td colspan="3">Aplica los elementos básicos, así como la ecuación de la circunferencia, para dar solución a problemas cotidianos.</td><td colspan="2">Participa activamente en la resolución de los problemas en los que se pone en juego el uso de la circunferencia.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

BLOQUE 6

Aplica la elipse.

Competencias disciplinares básicas:

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Unidad de competencia:

- Construye e interpreta modelos auxiliándose de distintas formas de la ecuación de la elipse al resolver problemas derivados de situaciones reales, hipotéticas o teóricas.
- Interpreta tablas, gráficas y expresiones como distintas representaciones de la elipse.
- Argumenta la pertinencia de utilizar una forma específica de la ecuación de la elipse dependiendo de la naturaleza de la tarea que tenga que realizar.

Atributos a desarrollar en el bloque:

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
8.1 Propone maneras de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
8.3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Tiempo asignado: 11 horas

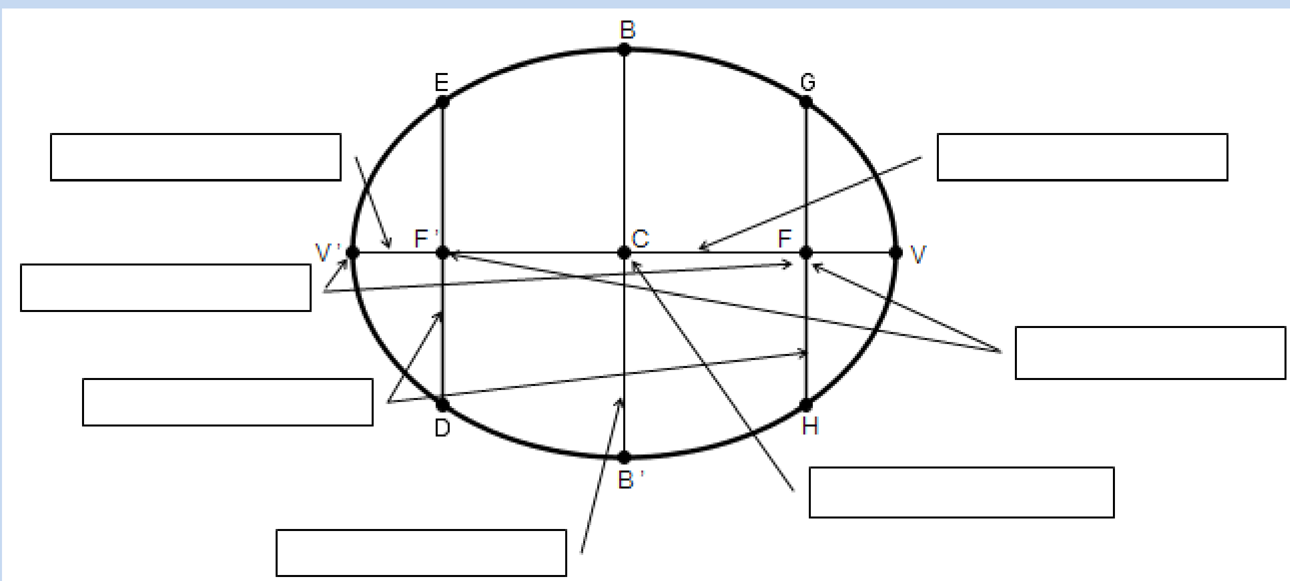
Secuencia didáctica 1.
Caracterización geométrica.

Inicio

Actividad: 1

Después de leer cuidadosamente cada uno de los siguientes conceptos, identifícalos en la gráfica posterior, colocando su nombre en el rectángulo correspondiente.

Centro: Punto donde se intersecan los ejes de simetría.
Vértices: Puntos pertenecientes a la elipse que se encuentran más alejados del centro.
Focos: Puntos fijos que se encuentran dentro del área de la elipse.
Eje mayor: Eje de simetría de mayor longitud de la elipse.
Eje menor: Eje de simetría de menor longitud de la elipse.
Eje focal. Segmento de recta que tiene por extremos los focos.
Lado Recto: Segmento de recta perpendicular al eje mayor y pasa por el foco.



<table>
<tr><td colspan="6">Evaluación</td></tr>
<tr><td>Actividad: 1</td><td colspan="3">Producto: Ejercicio de relación.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><td colspan="6">Saberes</td></tr>
<tr><td>Conceptual</td><td colspan="3">Procedimental</td><td colspan="2">Actitudinal</td></tr>
<tr><td>Identifica los elementos de la elipse.</td><td colspan="3">Relaciona, en la gráfica, el concepto con el elemento.</td><td colspan="2">Realiza la actividad con entusiasmo y corrige sus errores.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Desarrollo

Actividad: 2

En equipo, desarrolla la siguiente práctica.

Materiales:

- Tabla de madera rectangular de 30 cm x 20 cm.
- Cuerda de 20 cm de longitud máxima.
- Dos tachuelas o clavos.
- Un plumón de punta delgada, color obscuro.
- Regla.

Procedimiento:

1. En la tabla de madera, dibujar los ejes coordenados, de tal manera que el origen quede en el centro de la misma.
2. Sujetar los extremos del hilo a las tachuelas y clavar en la tabla sobre el eje X, a la misma distancia del origen; de tal manera que las tachuelas no se claven por completo y el hilo quede holgado.
3. Con el marcador, estirar el hilo y trazar el lugar geométrico al ir recorriendo los cuadrantes del plano dibujado, con el plumón.
4. Nombrar los elementos de la elipse de acuerdo a las denominaciones de la gráfica que se presentó en la actividad anterior
5. Con la ayuda de una regla, realizar las mediciones que se indican en la tabla y el registro correspondiente.

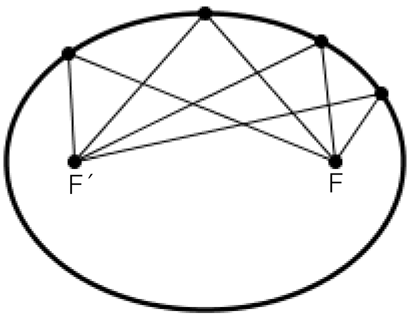
Segmento	Longitud
$\overline{CV}$	
$\overline{CF}$	
$\overline{CB}$	
$\overline{VV'}$	
$\overline{BB'}$	
$\overline{FF'}$	
$\overline{FV}$	
$\overline{ED}$	
$\overline{GH}$	
$\overline{F'B} + \overline{BF}$	

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 2</td><td colspan="3">Producto: Práctica.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica los elementos en el lugar geométrico correspondiente a la elipse.</td><td colspan="3">Dibuja el lugar geométrico correspondiente a la elipse y ubica los elementos de la misma.</td><td colspan="2">Realiza la práctica de forma creativa y entusiasta.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

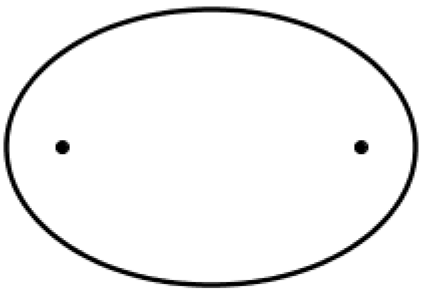
La elipse como lugar geométrico.

En esta secuencia se abordará básicamente la graficación de la elipse, para ello, se requiere conocer su definición como lugar geométrico, así como los elementos que la componen.

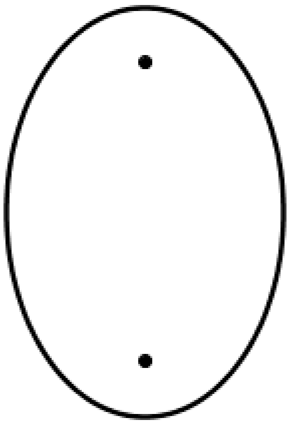
Elipse: Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre dos puntos.



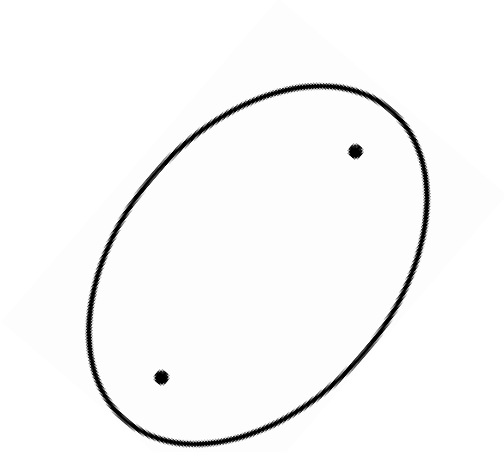
En el nivel medio superior sólo se aborda la elipse en dos orientaciones, la elipse horizontal y la elipse vertical; la elipse con ángulo de rotación en sus ejes se aborda en el nivel superior.



Elipse horizontal



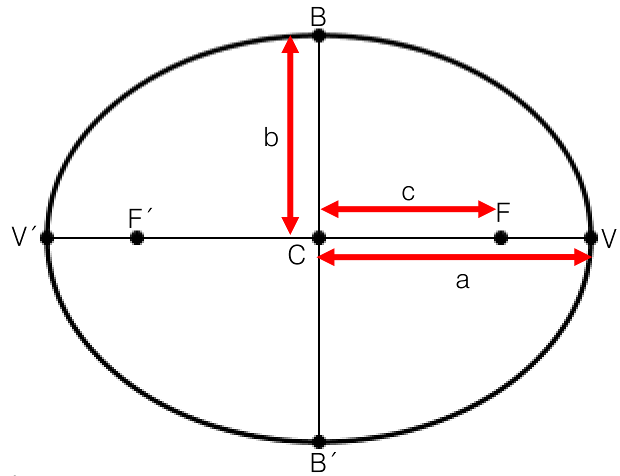
Elipse vertical



Elipse con ángulo de rotación

Johannes Kepler (1571 - 1630) descubrió que los planetas giran alrededor del Sol en órbitas elípticas, con el Sol colocado no en el centro sino en uno de los focos. El uso de las elipses para explicar el movimiento de los planetas es tan sólo una de sus diversas aplicaciones.

Elementos de la elipse.

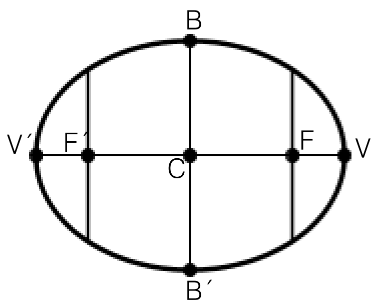


Los vértices son los puntos V y V´.
Los focos son los puntos F y F´.
El centro es el punto $C(h,k)$.
El eje mayor es el segmento que une a los puntos V y V´; su longitud es "2a".
El eje menor es el segmento que une a los puntos B y B´; su longitud es "2b".
El eje focal es el segmento que une a los focos, F y F´; su longitud es "2c".

Si se considera la mitad de los ejes, a éstos se les antepone el prefijo "semi", como se muestra a continuación.

El semieje mayor es el segmento que une al centro con uno de los vértices, y su longitud es "a".
El semieje menor es el segmento que une al centro con cualquiera de los puntos B o B´, y su longitud es "b".
El semieje focal es el segmento que une al centro con cualquiera de los focos, y su longitud es "c".

El lado recto es el segmento perpendicular al eje mayor, que tiene como extremos dos puntos de la elipse y pasa por cada foco, su longitud equivale a $\frac{2b^2}{a}$.



Sitios Web recomendados:

En los siguientes sitios encontrarás la forma en que se grafica la elipse y algunos de sus elementos.
http://www.youtube.com/watch?v=zIKmRUqJRJw&feature=player_embedded#at=43

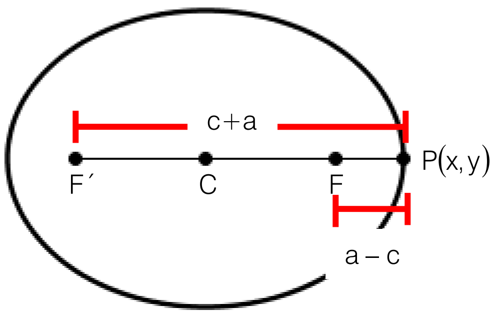
http://es.wikipedia.org/wiki/Elipse

Si se considera un punto cualquiera de la elipse $P(x,y)$, por definición de la curva, la suma de las distancias del punto P a los focos es constante, en específico, 2a.

La afirmación anterior se puede demostrar mediante la siguiente explicación.

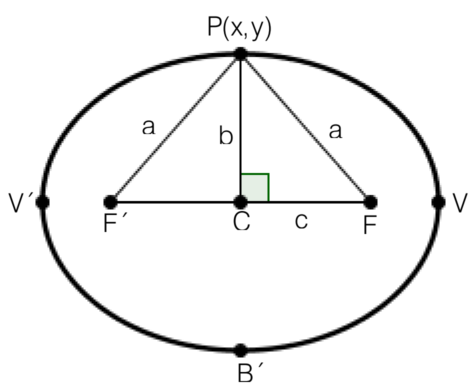
Si se considera el punto $P(x,y)$ coincidiendo con el vértice V, la suma de distancias del punto a los focos es:

$$d_{F'P} + d_{PF} = cte$$
$$(c+a) + (a-c) = cte$$
$$2a = cte$$



De aquí se deduce, que si el punto $P(x,y)$ se posiciona en el punto B, se forma un triángulo rectángulo.

Por lo tanto, el teorema de Pitágoras se expresa con los semiejes de la siguiente manera:

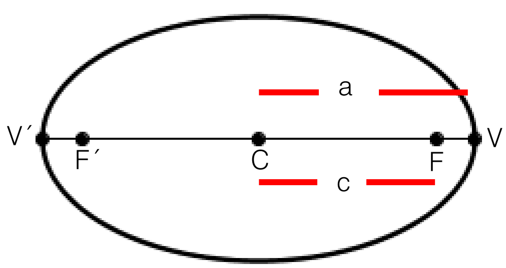


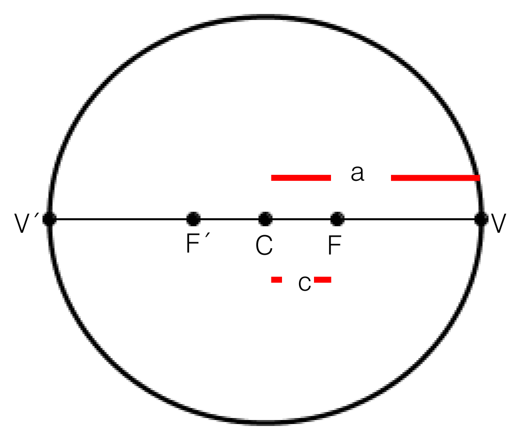
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Observando las relaciones que existen entre los semiejes, una en particular, proporciona la redondez de la misma; a esta relación se le denomina *Excentricidad* y se expresa con el siguiente cociente:

$$e = \frac{c}{a}$$

Como “a” es el semieje mayor, entre más se acerque “c” al semieje mayor, el valor de la excentricidad se aproxima a 1 y esto provoca que la excentricidad esté alargada.





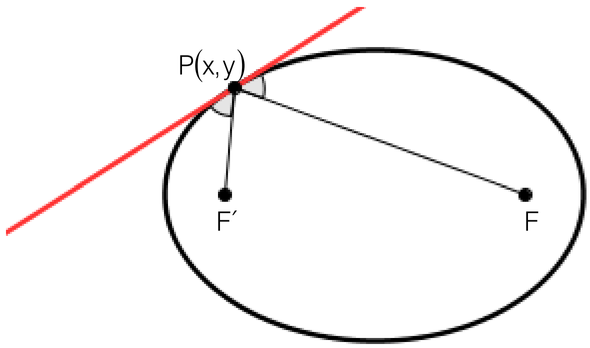
Esto explica la dificultad para los astrónomos al detectar las órbitas elípticas de los planetas, pues éstas tienen los focos muy cerca de su centro, lo cual las hace casi circulares. La siguiente tabla muestra la excentricidad de las órbitas de los nueve planetas y la Luna.

Mercurio	$e = 0.2056$	Saturno	$e = 0.00543$
Venus	$e = 0.0068$	Urano	$e = 0.0460$
Tierra	$e = 0.0167$	Neptuno	$e = 0.0082$
Marte	$e = 0.0934$	Plutón	$e = 0.2481$
Júpiter	$e = 0.0484$	Luna	$e = 0.0549$

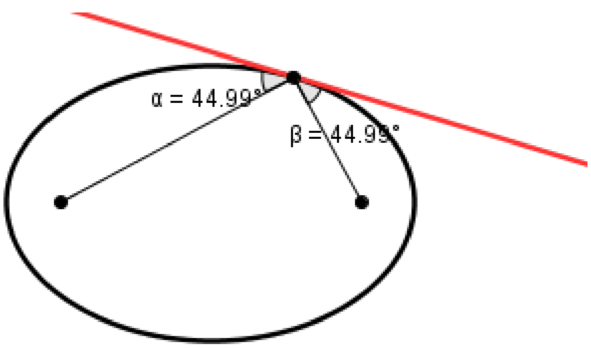
Propiedad de la elipse.

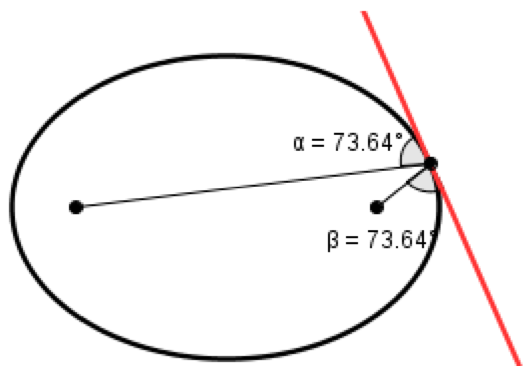
Una de las propiedades geométricas más interesante de la elipse afirma que: un rayo que emana de uno de los focos de la elipse y se refleja en ella pasa por el otro foco; esta propiedad se conoce como la propiedad reflectora.

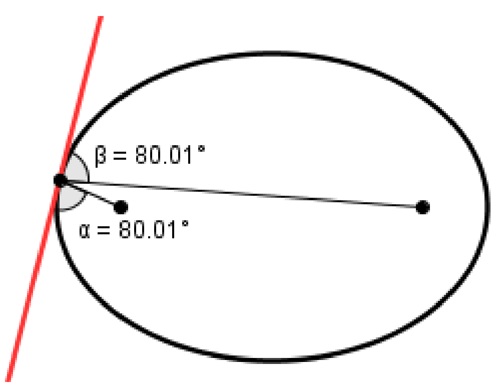
Teorema (propiedad de reflexión)
La recta tangente a una elipse en un punto $P(x, y)$ forma ángulos iguales con las rectas que pasan por P y por alguno de los focos.

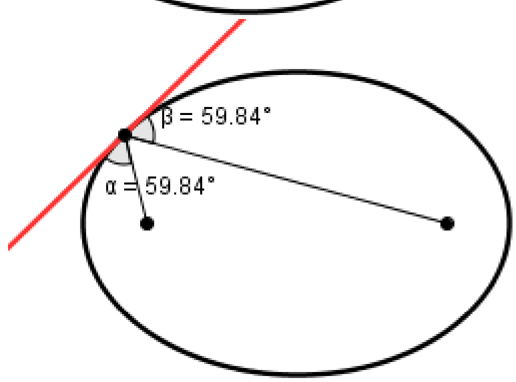


A continuación se muestran algunos ángulos, los cuales los puedes comprobar con un transportador.









Actividad: 3

Utiliza las longitudes obtenidas en la actividad 2, donde construiste una elipse y mediste las distancias, para desarrollar lo que se pide a continuación.

1. Verificar la fórmula de la longitud de lado recto $LLR = \frac{2b^2}{a}$, para ello, sustituir los elementos de la fórmula y compararla con la longitud de los segmentos $\overline{ED}$ y $\overline{GH}$, completando los espacios vacíos en las expresiones que se muestran a continuación.

$$LLR = \frac{2(\quad)^2}{(\quad)} = \boxed{\quad} \qquad d_{ED} = \boxed{\quad} \qquad d_{GH} = \boxed{\quad}$$

2. La suma de distancias de un punto cualquiera de la elipse a los focos, es constante y equivale a "2a".

$$d_{F'P} + d_{PF} = 2a$$

Si se considera el punto B y el vértice para comprobar lo anterior, sustituye

$$d_{F'B} + d_{BF} = 2a$$

$$d_{F'B} + d_{BF} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad} = \boxed{\quad} \qquad 2a = 2(d_{CV}) = 2\boxed{\quad} = \boxed{\quad}$$

$$d_{F'V} + d_{VF} = 2a$$

$$d_{F'V} + d_{VF} = (d_{FC} + d_{CV}) + (d_{FV}) = (\boxed{\quad} + \boxed{\quad}) + (\boxed{\quad}) = \boxed{\quad}$$

$$2a = 2(\overline{CV}) = 2\boxed{\quad} = \boxed{\quad}$$

3. Comprobar el teorema de Pitágoras utilizando las longitudes de los semiejes.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(d_{CV})^2 = (d_{CB})^2 + (d_{CF})^2$$

$$\boxed{\quad} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad}$$

$$\boxed{\quad} = \boxed{\quad}$$

Evaluación					
Actividad: 3	Producto: Verificación de fórmulas.			Puntaje:	
Saberes					
Conceptual	Procedimental			Actitudinal	
Reconoce los elementos de la elipse.	Comprueba elementos y propiedades de la elipse.			Muestra disposición al realizar la actividad.	
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente	

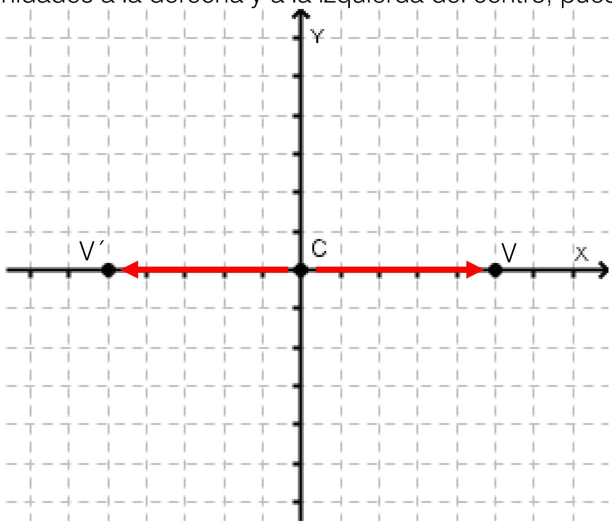
Gráfica de la elipse.

Para trazar la gráfica de la elipse se requiere conocer el centro de la misma, los semiejes, la longitud del lado recto y el tipo de elipse, en algunos casos la información que se requiere para trazarla está “escondida” y se necesita de las fórmulas de la excentricidad, longitud de lado recto, el teorema de Pitágoras, entre otras.

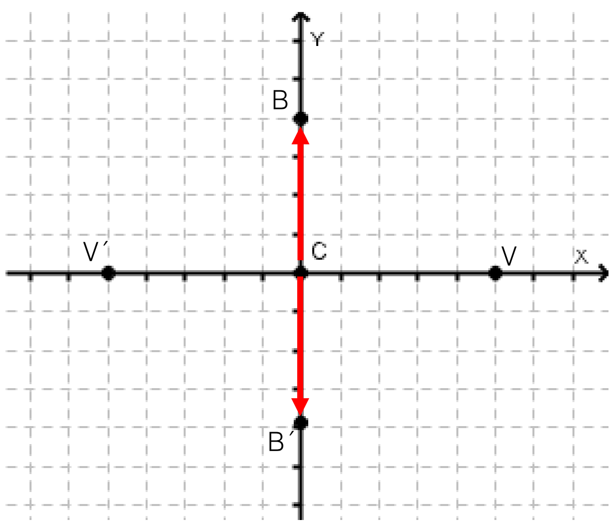
A continuación se ejemplificará el trazo de elipses dependiendo de ciertas condiciones.

Ejemplo 1.
Graficar la elipse horizontal que tiene como vértice el origen, la longitud del eje mayor es 10 y la del eje menor es 8.

Primero se dibuja el plano cartesiano y se ubica el centro, posteriormente se tiene que considerar que la elipse es horizontal, por lo tanto, el eje mayor está sobre el eje de las X; tomando en cuenta estas consideraciones, a partir del centro, se ubican los vértices 5 unidades a la derecha y a la izquierda del centro, puesto que el semieje mayor es 5.



Ahora se ubican los puntos B y B´ a 4 unidades hacia arriba y hacia abajo del centro, debido a que el semieje menor es 4.



En este paso todavía no se puede trazar la elipse, porque se requiere dibujar su redondez y ésta se logra con la longitud del lado recto; para ubicarlos se requiere conocer la localización de los focos, éstos dependen del semieje focal.

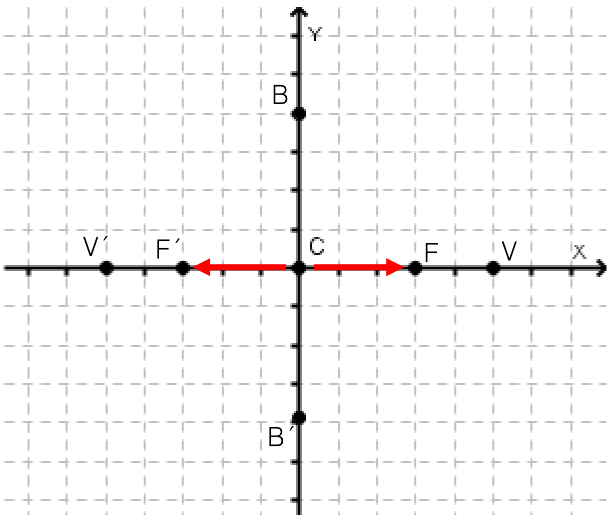
Para conocer la longitud del semieje focal se utiliza el Teorema de Pitágoras.

Semieje mayor $\rightarrow$ $a = 5$

Semieje menor $\rightarrow$ $b = 4$

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$c = \sqrt{(5)^2 - (4)^2}$$
$$c = \sqrt{25 - 16}$$
$$c = \sqrt{9}$$
$$c = 3$$

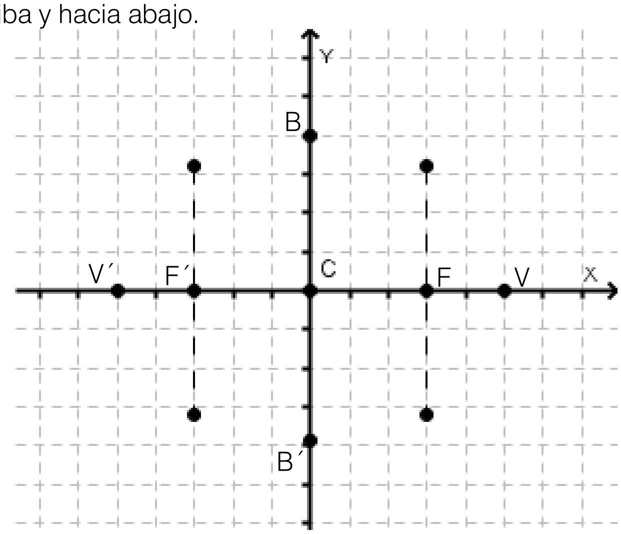
Los focos se ubican 3 unidades a la derecha y a la izquierda del centro.



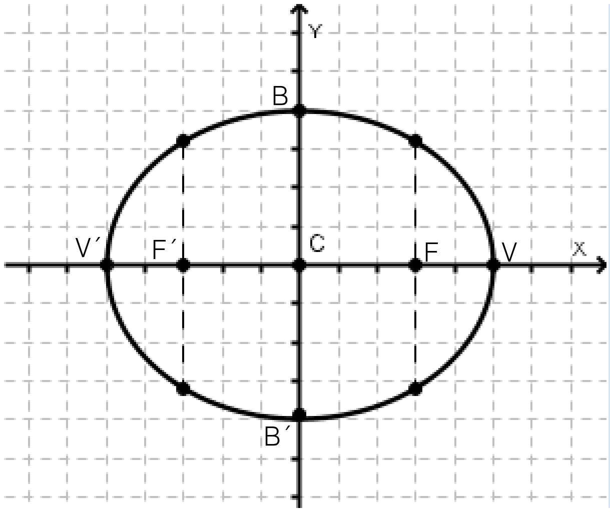
Ahora se obtiene la longitud del lado recto.

$$LLR = \frac{2b^2}{a}$$
$$LLR = \frac{2(4)^2}{5}$$
$$LLR = \frac{32}{5} \approx 6.4$$

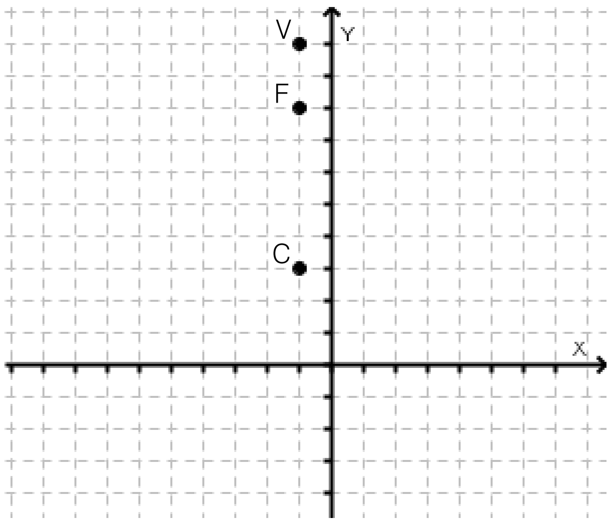
Para ubicar los extremos del lado recto se toma la mitad de la longitud del lado recto y a partir del foco, se dibujan los puntos a 3.2 unidades hacia arriba y hacia abajo.



Ahora se unen los vértices, los extremos de lado recto y los puntos B y B´, procurando que no sean segmentos de rectas, como se muestra a continuación.



Ejemplo 2.
Graficar la elipse cuyo centro es el punto $C(-1,3)$, vértice $V(-1,10)$ y foco $F(-1,8)$.
Se grafican los puntos dados, para visualizar el tipo de elipse que se desea trazar y para obtener el valor de los semiejes proporcionados por los puntos.



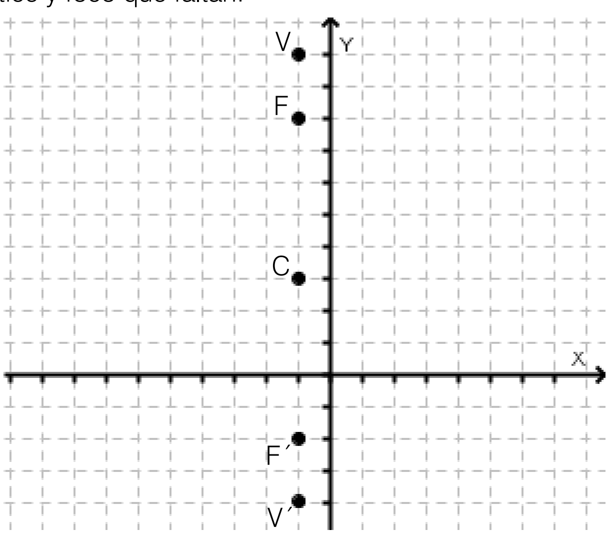
En la gráfica se observa que la elipse es vertical, debido a la orientación del foco y vértice, además, el semieje mayor mide 7 unidades, puesto que es la distancia del centro al vértice.

También el semieje focal mide 5 unidades, éste es la distancia del centro al foco.

$a = 7$

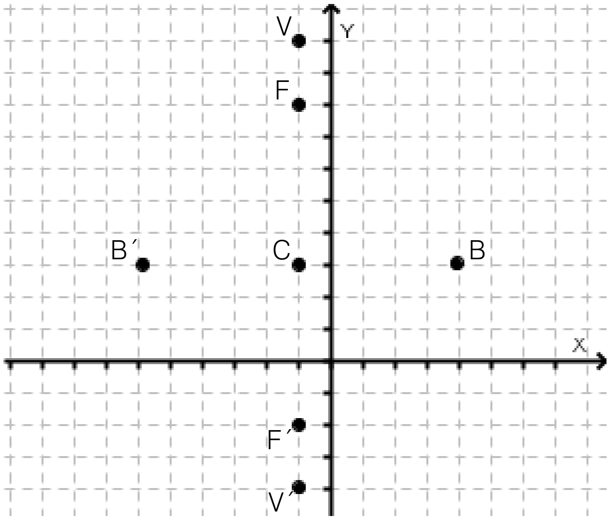
$c = 5$

Posteriormente se grafican el vértice y foco que faltan.



Mediante el Teorema de Pitágoras se obtiene el semieje menor.

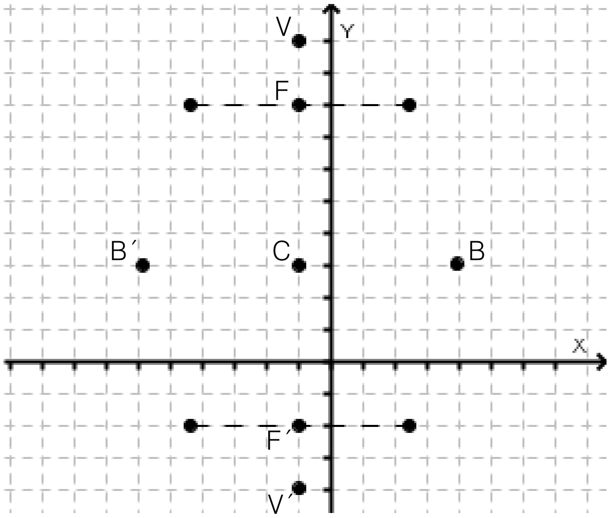
$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$
$$b = \sqrt{(7)^2 - (5)^2}$$
$$b = \sqrt{49 - 25}$$
$$b = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$
$$b \approx 4.9$$



Los puntos B y B´ se ubican aproximadamente a 4.9 unidades a la derecha e izquierda del centro.

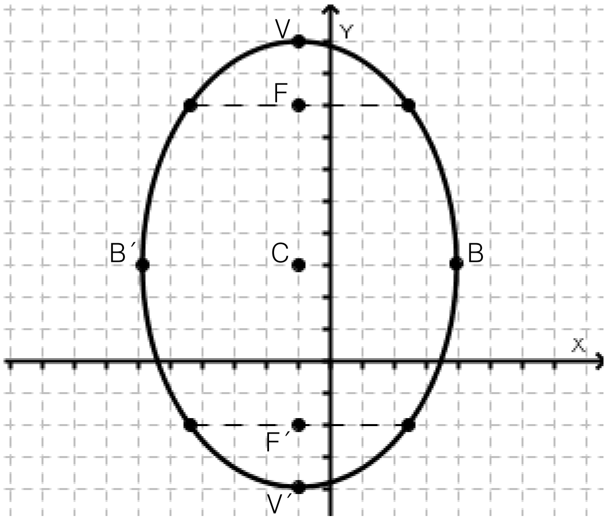
A continuación se calculan los extremos del lado recto.

$$LLR = \frac{2b^2}{a}$$
$$LLR = \frac{2\left(\sqrt{24}\right)^2}{7}$$
$$LLR = \frac{48}{7} \approx 6.8$$



Se divide entre dos la longitud del lado recto y, a partir de los focos, se ubican los extremos del lado recto a 3.4 unidades a la izquierda y derecha, como se ve en la gráfica.

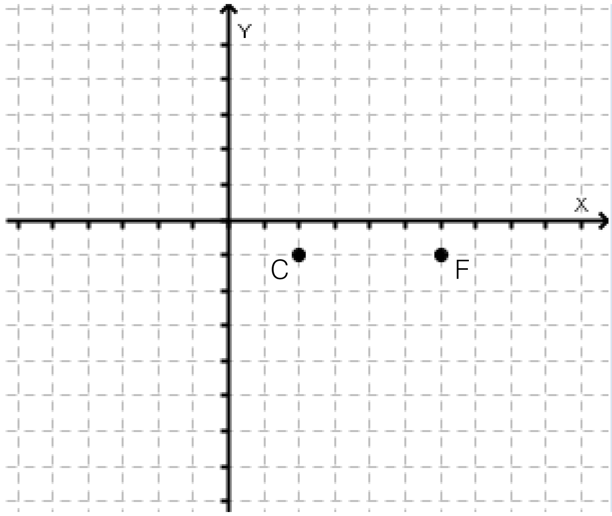
Por último, se unen los puntos y se visualiza la elipse.



Ejemplo 3.

Graficar la elipse cuyo centro es el punto $C(2,-1)$, la coordenada de uno de los focos es el punto $F(6,-1)$ y la excentricidad es $\frac{2}{3}$.

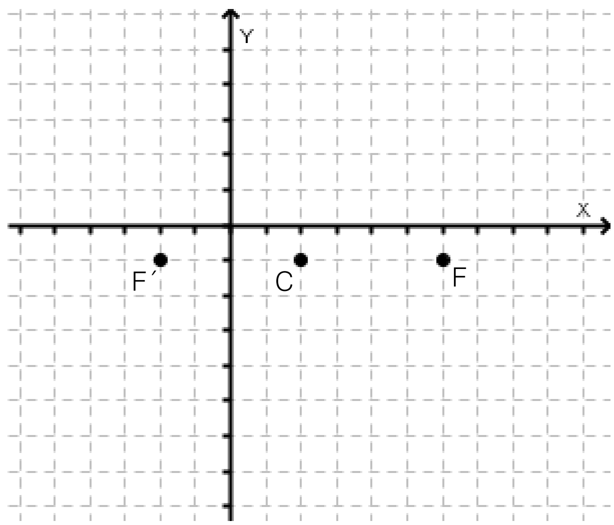
Se grafican los puntos proporcionados para conocer el tipo de elipse.



En el plano se observa que la elipse es horizontal, ya que el semieje focal es paralelo al eje X, además, su longitud es de 4 unidades.

$$c = 4$$

Ahora se puede graficar el foco al lado contrario, es decir, a la izquierda del centro.



Ahora se requiere conocer otro de los semiejes, así que se toma el valor de la excentricidad para conocerlo.

El considerar que c=2 y a=3, es un error, ya que la fracción proviene de una fracción equivalente.

$$e = \frac{2}{3}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$$

Ahora se sustituye el semieje conocido, es decir, el semieje focal $(c = 4)$, para posteriormente despejar y encontrar la longitud del semieje mayor (a).

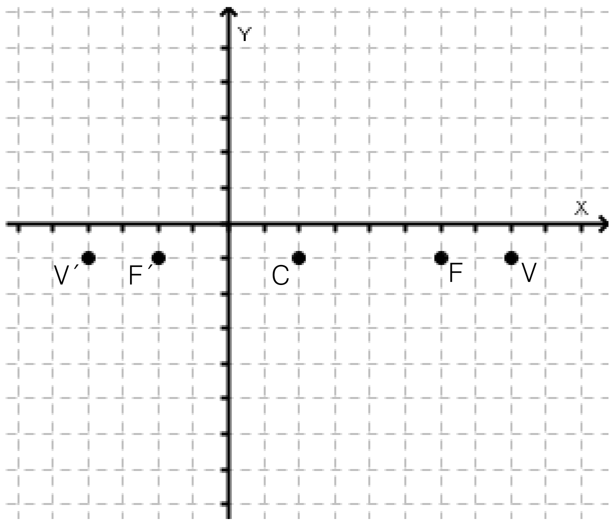
$$\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{a} = \frac{2}{3}$$

$$a = \frac{(4)(3)}{2}$$

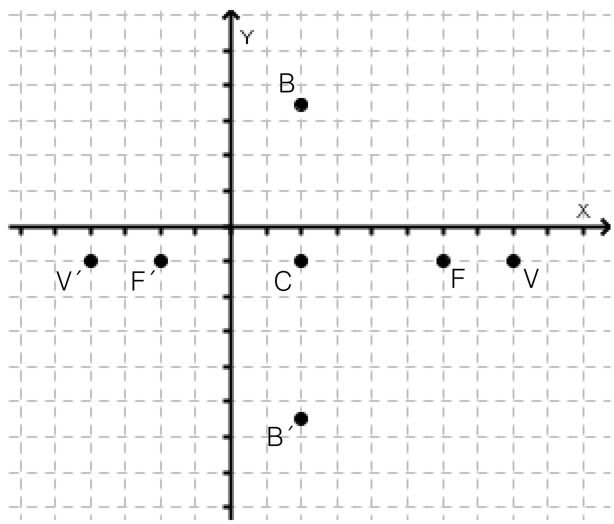
$$a = 6$$

Con este dato, se puede graficar los vértices, éstos están a 6 unidades a la derecha e izquierda del centro.



El semieje menor se obtiene aplicando el Teorema de Pitágoras, con éste se podrán graficar los puntos B y B´.

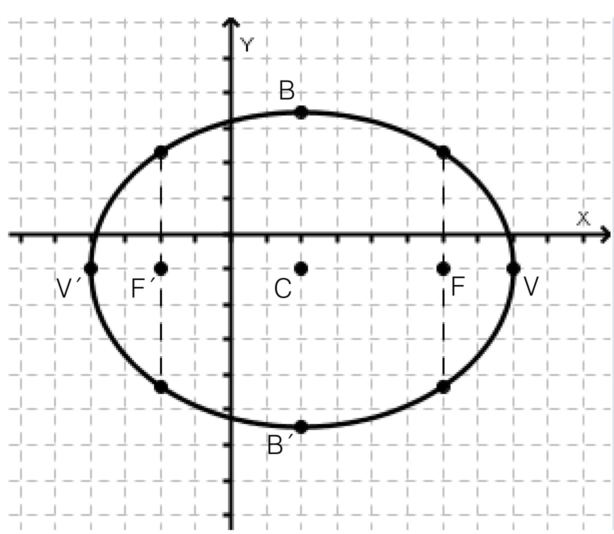
$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$
$$b = \sqrt{(6)^2 - (4)^2}$$
$$b = \sqrt{36 - 16}$$
$$b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$b \approx 4.5$$



A continuación se obtiene el lado recto y se traza la elipse.

$$LLR = \frac{2b^2}{a}$$
$$LLR = \frac{2\left(\sqrt{20}\right)^2}{6}$$
$$LLR = \frac{40}{6} = \frac{20}{3} \approx 6.7$$

Los extremos del vértice se ubican a 3.3 unidades hacia arriba y hacia debajo de los focos.

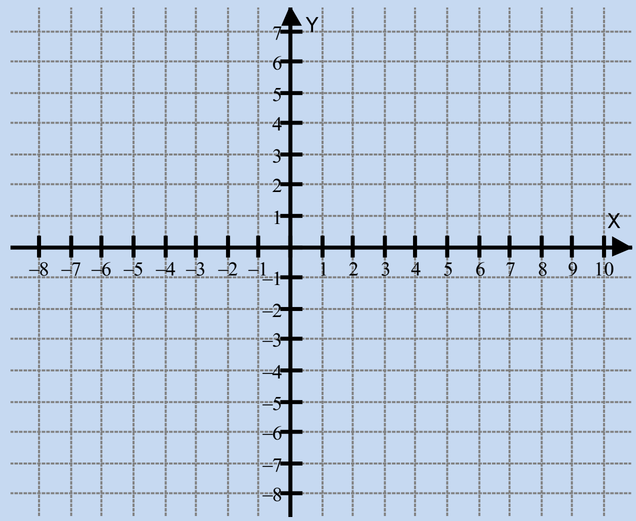


■ Cierre

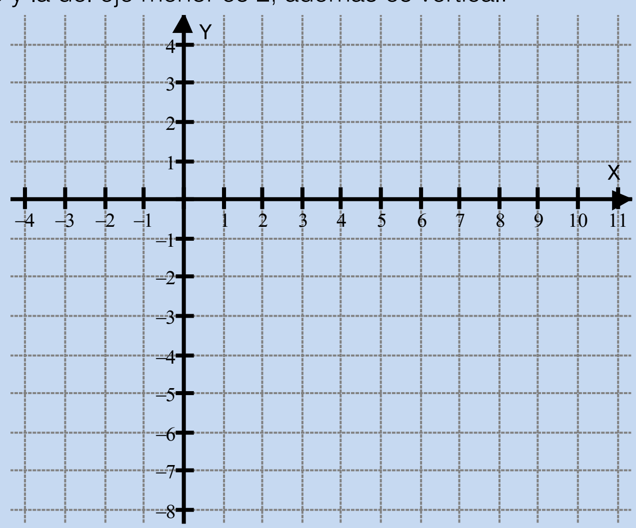
Actividad: 4

Traza la gráfica de la elipse que cumple con las siguientes condiciones.

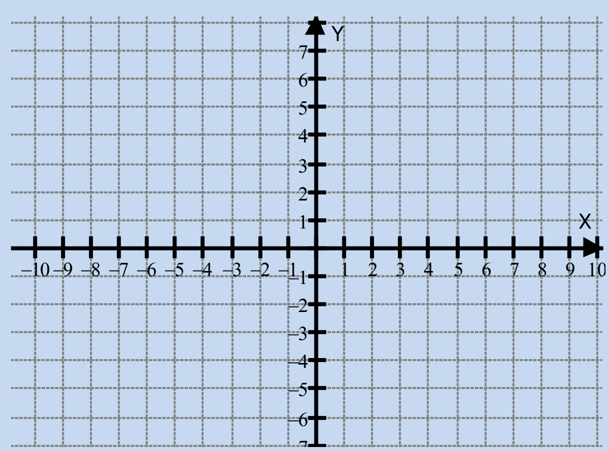
1. Con centro en $C(1,-2)$, el eje mayor es paralelo al eje X y su longitud es 16, además su excentricidad es $\frac{3}{4}$.



2. Con centro en $C(4,-2)$, la longitud de eje mayor de 5 y la del eje menor es 2, además es vertical.

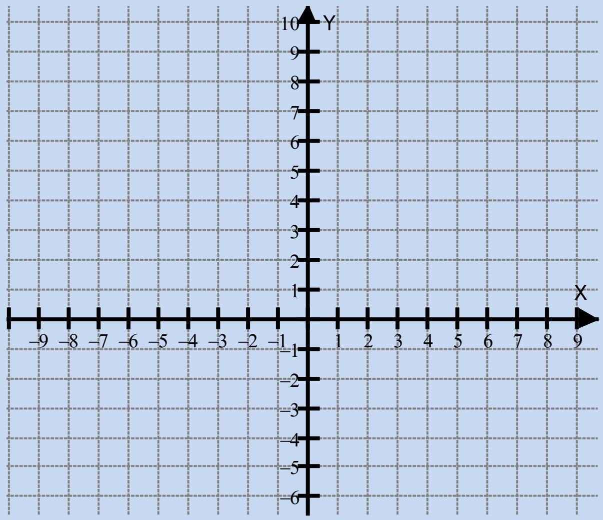


3. La suma de distancias a los focos $(\pm 3,0)$ es 16.

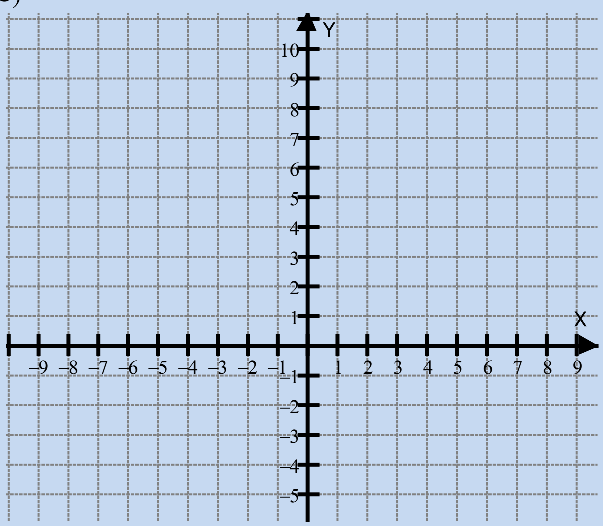


Actividad: 4 (continuación)

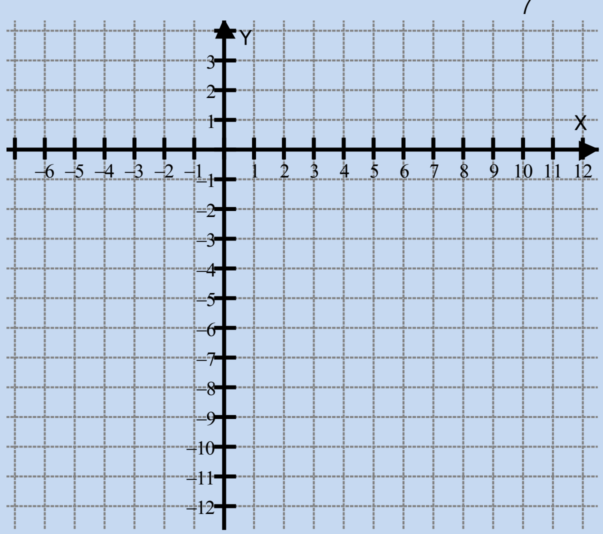
4. Con centro $C(2,0)$, el eje mayor de longitud 6 paralelo al eje Y, y eje menor de longitud 3.



5. Con vértices $V(5,3)$ y $V'(-5,3)$, focos $F(3,3)$ y $F'(-3,3)$.

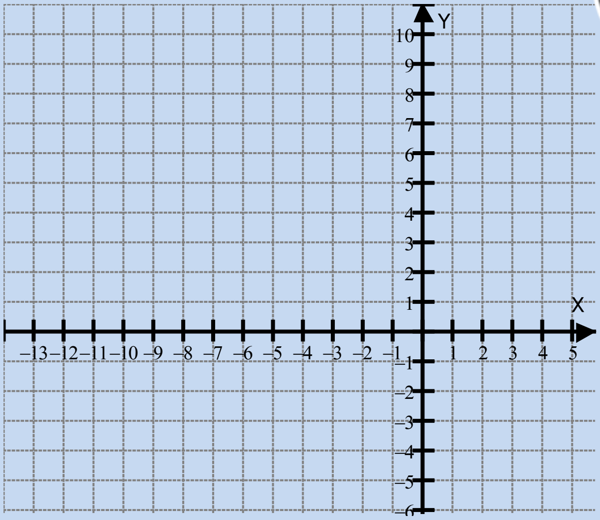


6. Con vértices $V'(-5,-4)$, $V(9,-4)$, la longitud del semieje menor es 3 y la longitud del lado recto es $\frac{18}{7}$.



Actividad: 4 (continuación)

7. Con centro $C(-4,3)$, foco $F(-4,6)$ y la longitud del lado recto es 9.



Evaluación						
Actividad: 4	Producto: Gráficas.				Puntaje:	
Saberes						
Conceptual	Procedimental				Actitudinal	
Identifica elementos de la elipse para realizar la gráfica.	Calcula los elementos faltantes, para realizar la gráfica de la elipse.				Expresa sus dudas, reconoce y corrige sus errores.	
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

Secuencia didáctica 2.
Ecuación de la elipse.

Inicio

Actividad: 1

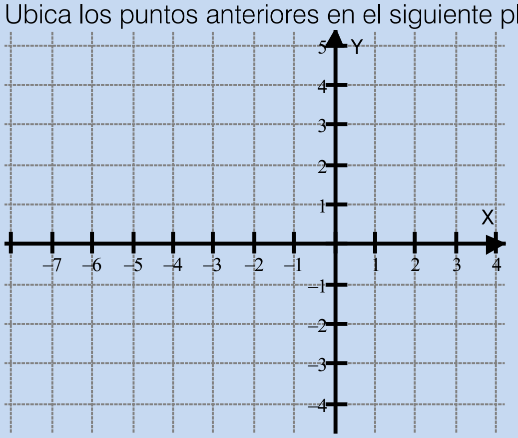
Responde lo que se pide:

1. Despeja la variable "y" de la ecuación $\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$, para que obtengas lo que se solicita en los incisos posteriores.

a) Sustituye los valores de "x" para completar la tabla y obtén los puntos correspondientes a la elipse.

x	y
– 7	
– 4	
– 2	
0	
3	

b) Ubica los puntos anteriores en el siguiente plano, para que traces la gráfica.



Actividad: 1 (continuación)

c) ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la elipse?

d) ¿Cuál es la longitud del semieje mayor?

e) ¿Cuál es la longitud del semieje menor?

f) ¿Cómo relacionas el centro, el semieje mayor y el semieje menor, con la ecuación de la elipse?

g) Desarrolla los binomios de la ecuación dada, para obtener la ecuación general de la elipse.

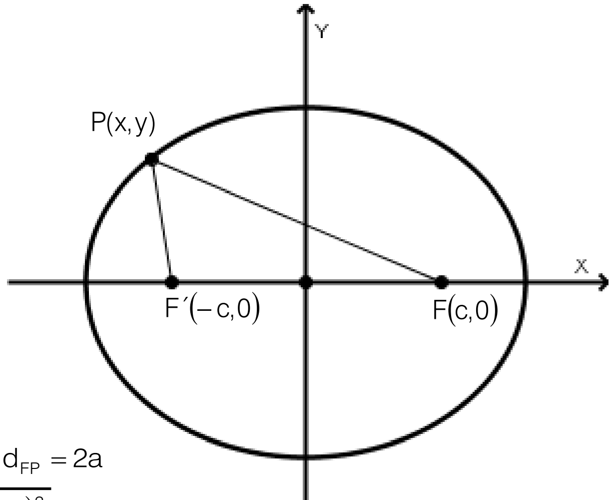
<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 1</td><td colspan="3">Producto: Gráfica y cuestionario.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><td colspan="6">Saberes</td></tr>
<tr><td>Conceptual</td><td colspan="3">Procedimental</td><td colspan="2">Actitudinal</td></tr>
<tr><td>Identifica elementos de la elipse.</td><td colspan="3">Obtiene elementos y la gráfica de la elipse.</td><td colspan="2">Muestra disposición para realizar la actividad.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Desarrollo

Elipse con centro en el origen.

Uno de los aspectos más importantes en la aplicación de las cónicas, es ubicar los puntos que están en ellas, por ello se requiere conocer la ecuación de las mismas, en este caso, se abordará la ecuación de la elipse con centro en el origen.

Para encontrar la forma canónica de la elipse, se utiliza la definición, la cual dice: es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre dos puntos.



$$d_{F'P}+d_{FP}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$

$$2xc=4a^2-4a\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}-2xc$$

$$4xc=4a^2-4a\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}$$

$$xc=a^2-a\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}$$

$$xc-a^2=-a\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}$$

$$(xc-a^2)^2=\left(-a\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)$$

$$x^2c^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$-x^2(a^2-c^2)-a^2y^2=-a^2(a^2-c^2)$$ como $b^2=a^2-c^2$, y si se multiplica por -1 se tiene:

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$$ dividiendo los dos términos entre a^2b^2

$$\frac{x^2b^2+a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Por lo tanto, la *forma canónica de la elipse horizontal* es:

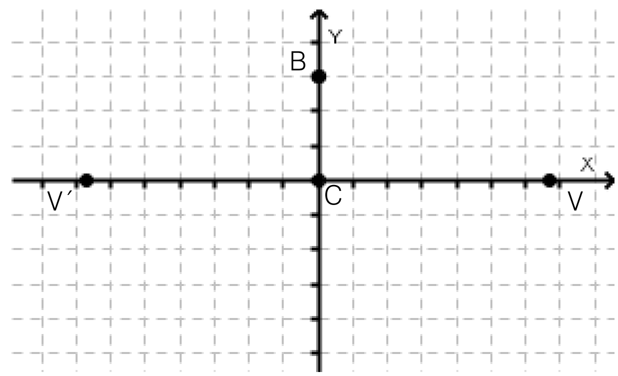
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Se sigue el mismo procedimiento para obtener la *forma canónica de la elipse vertical*, ésta es:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

Ejemplo 1.
Encontrar la forma canónica de la elipse cuyos vértices son los puntos $(\pm 6, 0)$ y la longitud de su eje menor es 3.

Primero se grafica la información dada, esto es, los vértices, de los cuales se sabe que el centro es su punto medio, por lo tanto, se ubica en el origen, además, el punto B queda a 3 unidades hacia arriba del centro, como se muestra en el siguiente plano cartesiano.



De la gráfica se deduce que es una elipse horizontal con $a=6$ y $b=3$.

Para encontrar la forma canónica de la elipse, sólo basta sustituir "a" y "b" en:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{(6)^2}+\frac{y^2}{(3)^2}=1$$

$$\frac{x^2}{26}+\frac{y^2}{9}=1$$

Para graficar la elipse, se requiere ubicar el punto B´, el cual está a 3 unidades hacia abajo del centro; también, mediante el Teorema de Pitágoras se encontrará la ubicación de los focos, y para trazar su redondez, se obtendrá la longitud del lado recto.

$$a^2=b^2+c^2$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{(6)^2-(3)^2}$$

$$c=\sqrt{36-9}$$

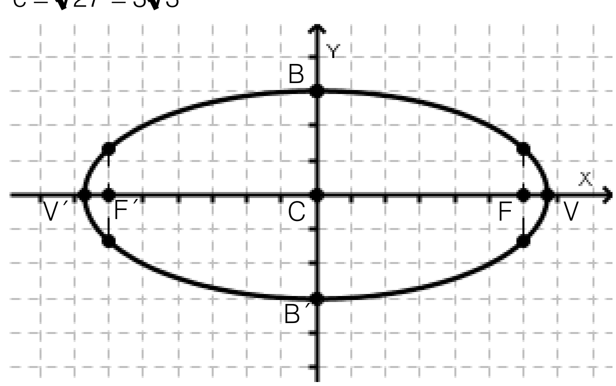
$$c=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

$$LLR=\frac{2b^2}{a}$$

$$LLR=\frac{2(3)^2}{6}$$

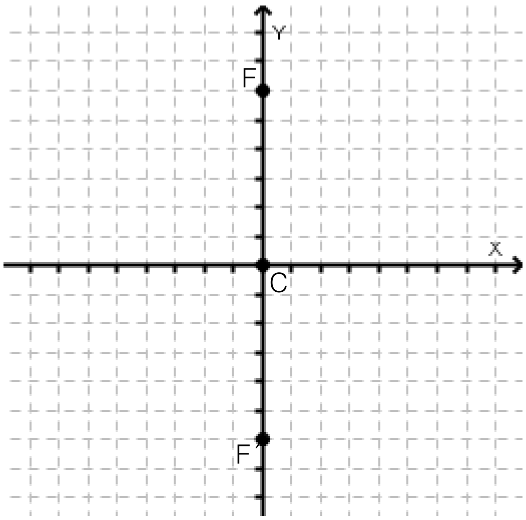
$$LLR=\frac{18}{6}=3$$

La gráfica queda:



Ejemplo 2.
Encontrar la ecuación de la elipse vertical cuyo centro es el origen, la longitud del semieje focal es 6 y la longitud del lado recto es 7.

Primero se grafica la información, para obtener más datos.



De la gráfica se desprende que el valor de $c = 6$.

Por otro lado, la longitud del lado recto es 7, por lo que se puede manipular la fórmula para poder obtener más información.

$$LLR = 7$$
$$\frac{2b^2}{a} = 7$$

Como se sabe $b^2 = a^2 - c^2$, por el Teorema de Pitágoras, y sustituyendo en la igualdad anterior, se obtiene:

$$\frac{2(a^2 - c^2)}{a} = 7$$

Desarrollándose lo anterior, se obtiene una ecuación de segundo grado con una incógnita, la cual se resuelve mediante la fórmula general.

$$\frac{2(a^2 - c^2)}{a} = 7$$
$$2a^2 - 2c^2 = 7a$$
$$2a^2 - 7a - 2c^2 = 0 \qquad \text{sustituyendo el valor de } c = 6$$
$$2a^2 - 7a - 72 = 0$$

Utilizando la fórmula general se tiene:

$$a = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$
$$a = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(-72)}}{2(2)}$$
$$a = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{4}$$
$$a = \frac{7 \pm \sqrt{625}}{4}$$
$$a = \frac{7 \pm 25}{4}$$
$$a_1 = \frac{7 + 25}{4} = 8 \qquad a_2 = \frac{7 - 25}{4} = -4.5$$

Se descarta el valor negativo y se toma el valor de $a = 8$, puesto que es una longitud.

No hay que olvidar que lo que se pretende es obtener el valor del semieje mayor (a) y el semieje menor (b), para obtener la ecuación de la elipse; así que utilizando el teorema de Pitágoras se puede conocer “b”.

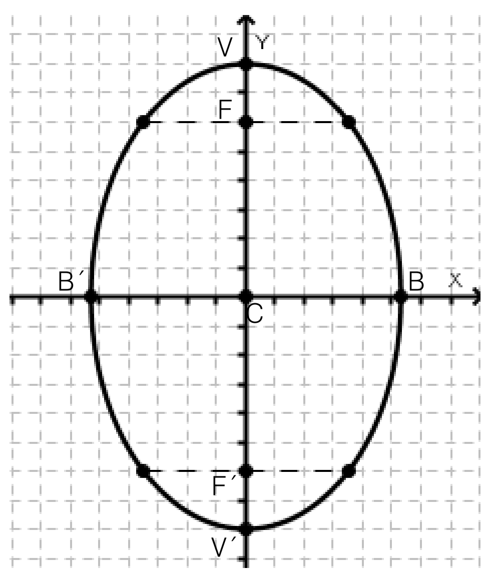
$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$
$$b = \sqrt{(8)^2 - (6)^2}$$
$$b = \sqrt{64 - 36}$$
$$b = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$
$$b \approx 5.3$$

Tomando la forma canónica de la elipse vertical y sustituyendo los valores de $a = 8$ y $b = \sqrt{28}$ se obtiene:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{28}\right)^2} + \frac{y^2}{(8)^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{64} = 1$$

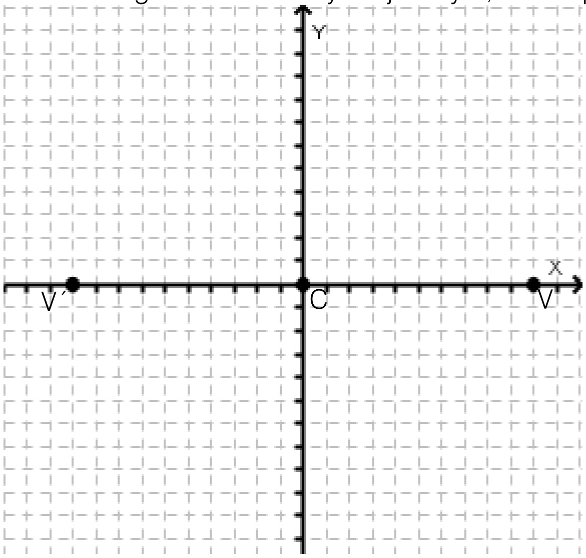
Para obtener la ecuación de la elipse, se multiplica por el *mínimo común múltiplo*, para eliminar los denominadores.

$$448\left(\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{64}\right) = (1)448$$
$$16x^2 + 7y^2 = 448$$
$$16x^2 + 7y^2 - 448 = 0$$



Ejemplo 3.
Encontrar la ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen, la longitud del eje mayor es 20, y su excentricidad es $\frac{1}{5}$.

Primero se grafica el centro y el eje mayor, el cual proporciona la ubicación de los vértices.



De aquí se deduce que $a=10$ y utilizando la excentricidad, se obtiene el valor de "c".

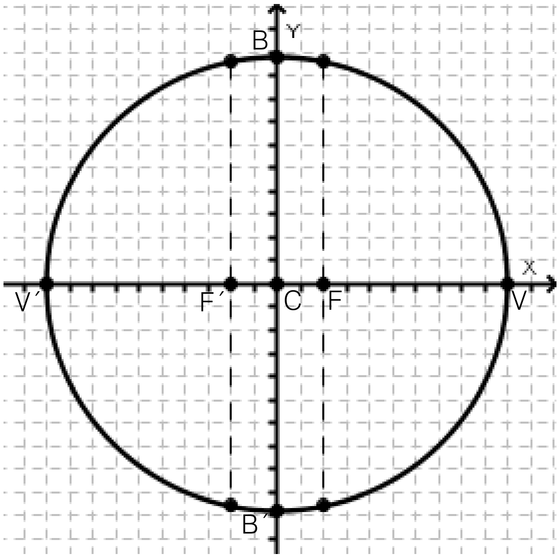
$$\frac{c}{a}=\frac{1}{5}$$
$$\frac{c}{10}=\frac{1}{5}$$
$$c=\frac{(10)(1)}{5}$$
$$c=2$$

Para obtener el valor de "b" se utiliza el Teorema de Pitágoras.

$$a^2=b^2+c^2$$
$$b=\sqrt{a^2-c^2}$$
$$b=\sqrt{(10)^2-(2)^2}$$
$$b=\sqrt{100-4}$$
$$b=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$$
$$b\approx 9.8$$

La ecuación y la gráfica quedan de la siguiente forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{x^2}{(10)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{96}\right)^2}=1$$
$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{96}=1$$

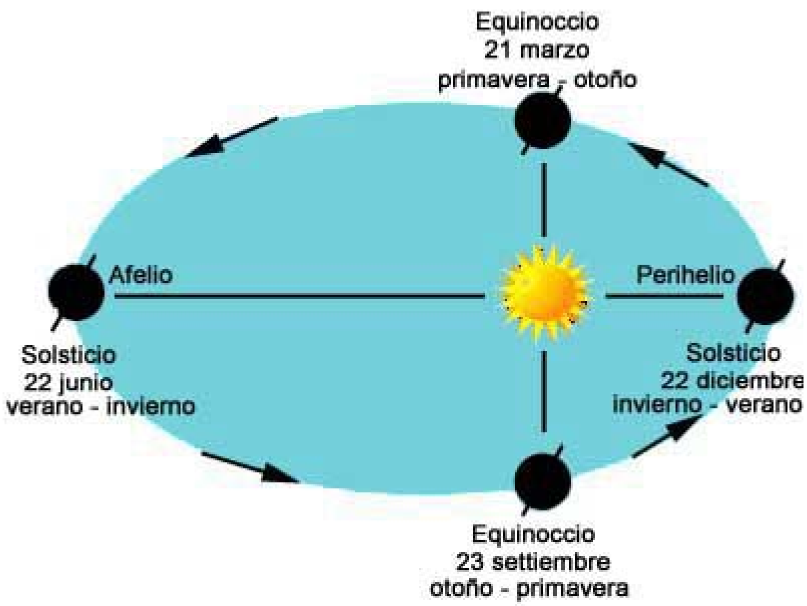


Multiplicando por el mínimo común múltiplo, el cual es 2400, se obtiene la ecuación.

$$2400\left(\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{96}\right)=(1)2400$$
$$24x^2+25y^2=2400$$
$$24x^2+25y^2-2400=0$$

Ejemplo 4.
La tierra se traslada alrededor del sol describiendo una elipse, éste se encuentra situado en uno de los focos de la trayectoria elíptica; por lo que la tierra en algunos momentos se encuentra más cerca del sol, que en otros.[1]

El eje mayor de la elipse tiene un punto de *afelio* y un punto de *perihelio.*
El *Afelio* es el punto en que la tierra se halla a máxima distancia del sol y el *perihelio* es el punto más cercano al sol.



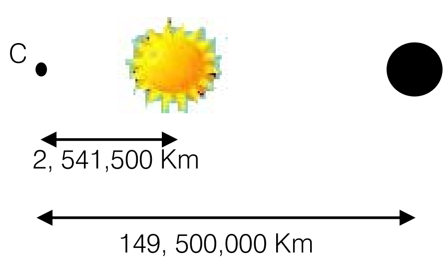
Si la excentricidad de la trayectoria elíptica recorrida por la tierra es de 0.017, y lo longitud del eje mayor es de 299 millones de kilómetros, encontrar la distancia mínima (Perihelio) entre el sol y la tierra.

Si el eje mayor es de 299 millones de kilómetros, entonces $a = 149{,}500{,}000$; así que utilizando la fórmula de excentricidad, se tiene:

$$\frac{c}{a} = 0.017$$

$$\frac{c}{149{,}500{,}000} = 0.017$$

$$c = 2{,}541{,}500$$



Por lo tanto, la distancia mínima entre el sol y la tierra es:

$$149{,}500{,}000 \text{ Km} - 2{,}541{,}500 \text{ Km} = 146{,}958{,}500 \text{ Km}$$

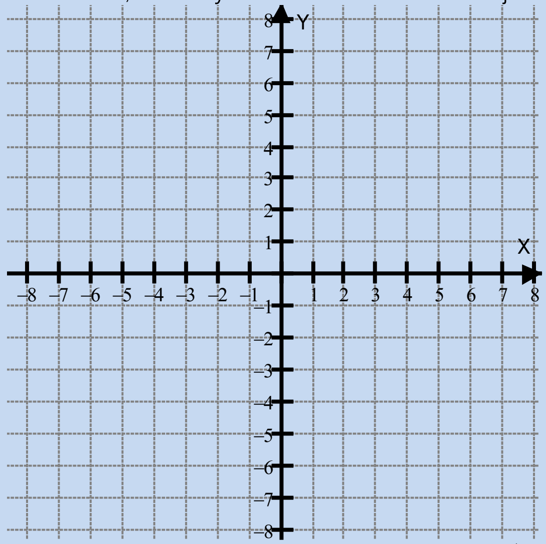
[1] http://www.paranauticos.com/Notas/Tecnicas/Mareas/tipos-mareas.htm

Actividad: 2

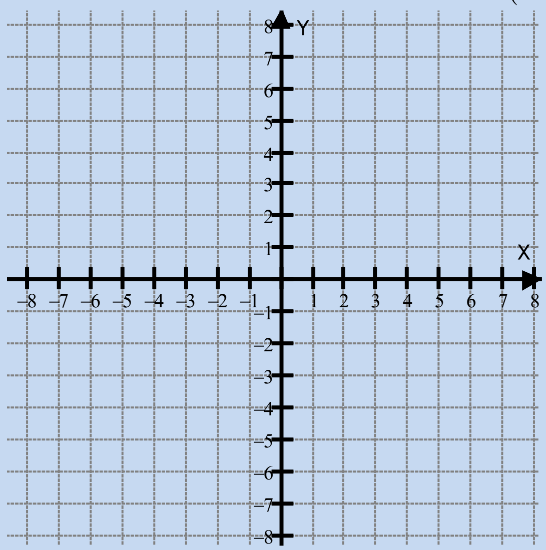
Desarrolla lo que se pide en cada sección.

I. Traza la gráfica y encuentra la forma canónica de la elipse que cumple con las siguientes condiciones.

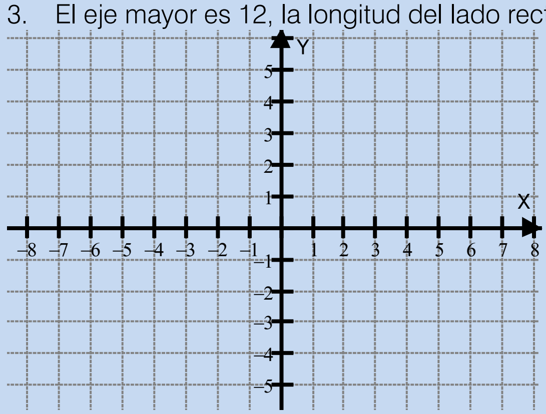
1. $a = 6$, $b = 4$ y los focos están sobre eje Y.



2. Las coordenadas de los vértices son $V(\pm 7, 0)$ y el eje menor es 8.



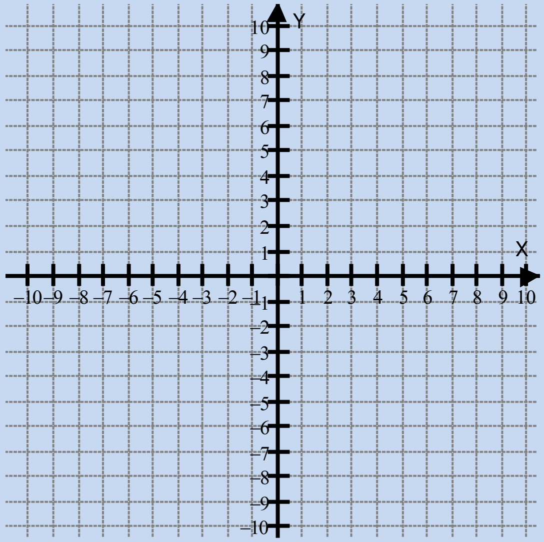
3. El eje mayor es 12, la longitud del lado recto es 6 y los vértices están sobre el eje Y.



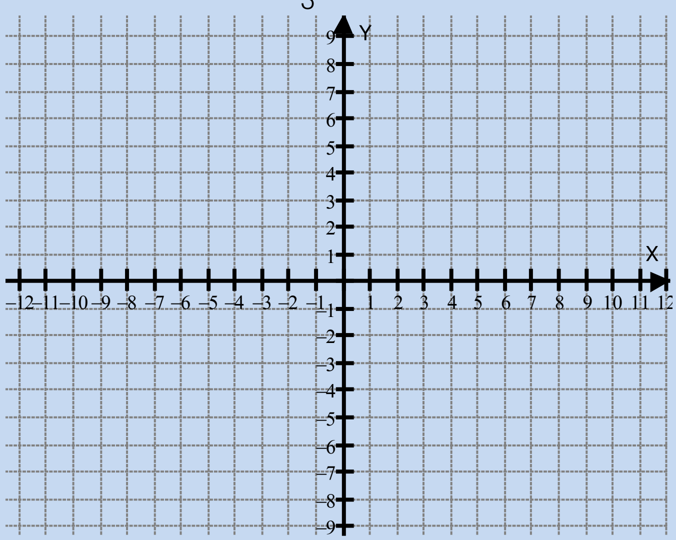
Actividad: 2 (continuación)

II. Encuentra la ecuación y la gráfica de la elipse que cumple con las siguientes condiciones.

1. El semieje menor es 9, la coordenada de uno de los focos es $F(-3,0)$.

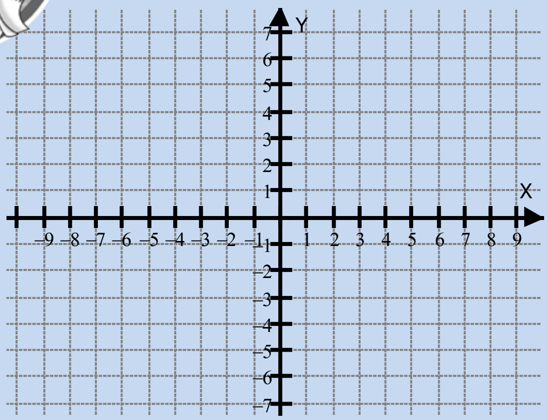


2. El eje focal es 20, $LLR = \frac{22}{3}$ y los focos están sobre el eje X.



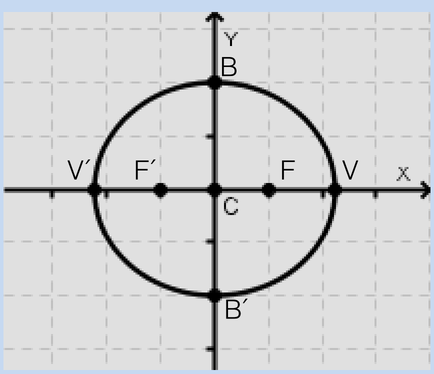
Actividad: 2 (continuación)

3. Uno de los vértices es el punto $V(-9,0)$ y la excentricidad es $\frac{1}{3}$.



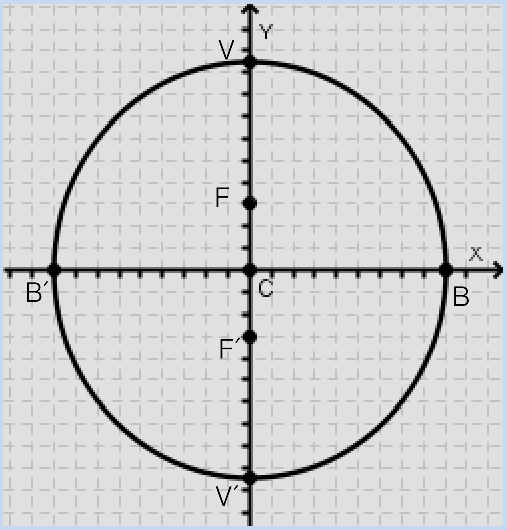
III. Dada la gráfica de la elipse, encuentra su ecuación.

1.

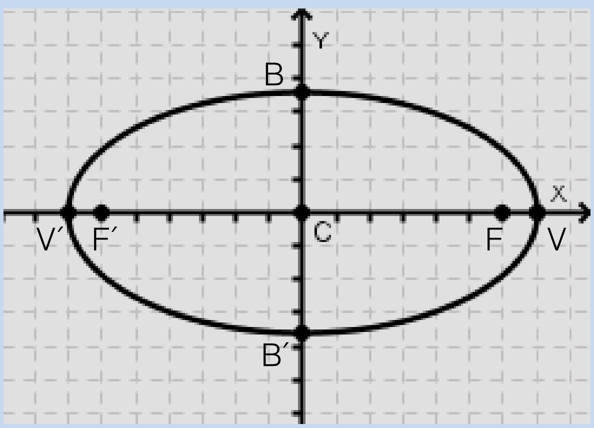


Actividad: 2 (continuación)

2.



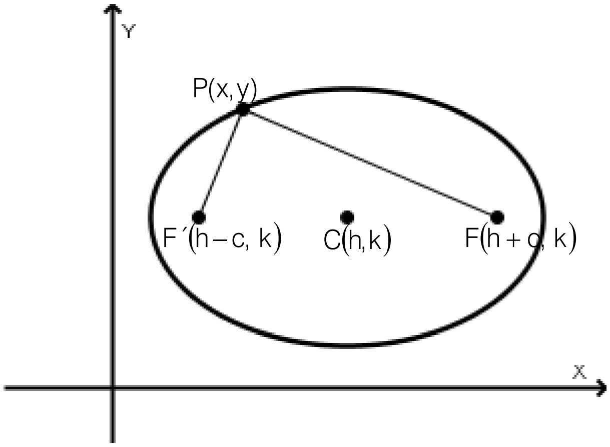
3.



Evaluación					
Actividad: 2	Producto: Ejercicios.			Puntaje:	
Saberes					
Conceptual	Procedimental			Actitudinal	
Identifica los elementos básicos para encontrar la ecuación y la gráfica de la elipse con centro en el origen.	Calcula ecuaciones de elipses con centro en el origen, y realiza la gráfica correspondiente.			Aprecia la facilidad para obtener la ecuación de la elipse con centro en el origen.	
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente	

Elipse con centro fuera del origen.

De forma similar a la *forma canónica*, se obtiene *la forma ordinaria de la elipse*; el centro tiene coordenadas $C(h, k)$.



La forma ordinaria de la elipse horizontal es:

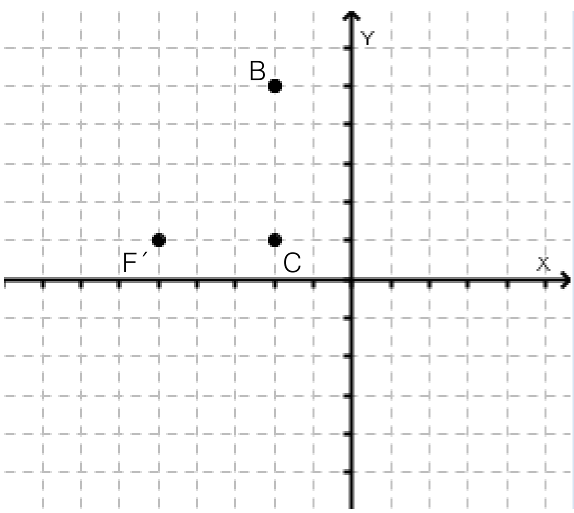
$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

La forma ordinaria de la elipse vertical es:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1}$$

Ejemplo 1.
Encontrar la forma ordinaria de la elipse cuyo centro es el punto $C(-2, 1)$, uno de los focos tiene como coordenadas $F´(-5, 1)$ y el semieje menor es 4.

Se grafican los datos para visualizar el tipo de elipse a la cual pertenece.



En el plano se visualiza, que $c = 3$ y $b = 4$.

Por medio del Teorema de Pitágoras se obtiene el valor de "a".

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$
$$a = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$$
$$a = \sqrt{16 + 9}$$
$$a = \sqrt{25}$$
$$a = 5$$

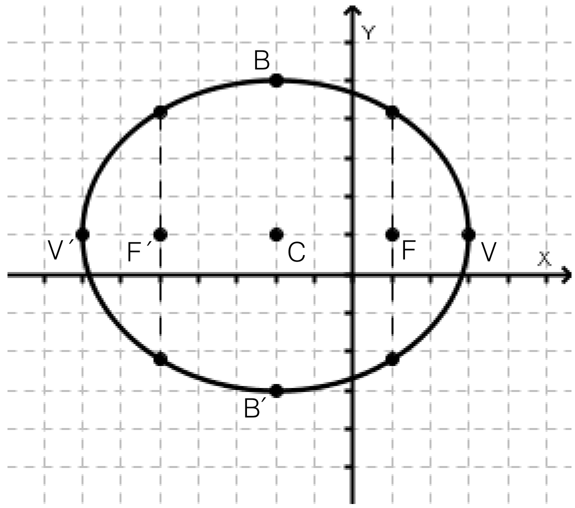
Por lo tanto la forma ordinaria queda:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$
$$\frac{(x+2)^2}{(5)^2}+\frac{(y-1)^2}{(4)^2}=1$$
$$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$$

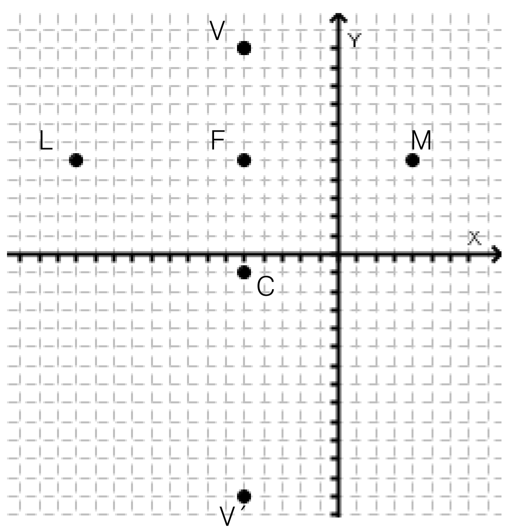
Para graficar la elipse se ubican los vértices a 5 unidades a la derecha e izquierda del centro, y los puntos restantes.

La longitud del lado recto es:

$$
\begin{aligned}
LLR &= \frac{2b^2}{a} \\
LLR &= \frac{2(4)^2}{5} \\
LLR &= \frac{32}{5} \\
LLR &= 6.4
\end{aligned}
$$



Ejemplo 2.
Encontrar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos $V(-5, 11)$ y $V'(-5, -13)$, además las coordenadas de los extremos de uno de los lados rectos son $L(-14, 5)$ y $M(4,5)$.



Debido a la orientación de los vértices, la elipse es vertical, y tomando en cuenta que el punto medio entre los vértices es el centro $C(-5, -1)$ y el punto medio de los extremos del lado recto es el foco $F(-5, 5)$, en la gráfica se observa que $a = 12$ y $c = 6$.

Mediante el Teorema de Pitágoras se obtiene el valor de "b".

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 \\
b &= \sqrt{a^2 - c^2} \\
b &= \sqrt{(12)^2 - (6)^2} \\
b &= \sqrt{144 - 36} \\
b &= \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \\
b &\approx 10.4
\end{aligned}
$$

La ecuación de la elipse se obtiene de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} &= 1 \\
\frac{(x+5)^2}{(\sqrt{108})^2} + \frac{(y+1)^2}{(12)^2} &= 1 \\
\frac{(x+5)^2}{108} + \frac{(y+1)^2}{144} &= 1
\end{aligned}
$$

El resultado anterior es la forma ordinaria de la elipse, y para obtener la ecuación se multiplica por el mínimo común múltiplo, el cual es 432, para eliminar los denominadores, y posteriormente se desarrollan los binomios y se acomoda los términos.

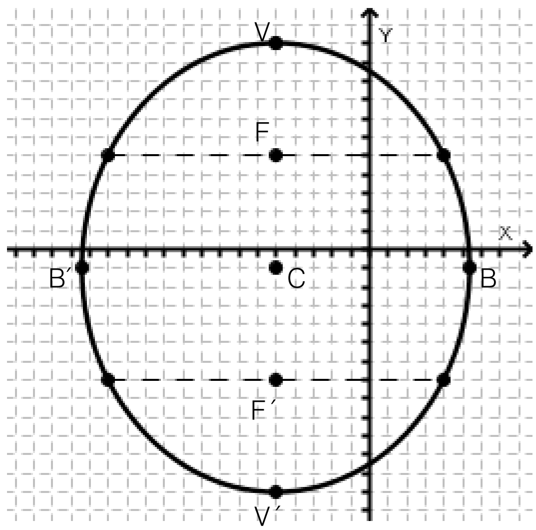
$$432\left(\frac{(x+5)^2}{108}+\frac{(y+1)^2}{144}\right)=(1)432$$

$$4(x+5)^2+3(y+1)^2=432$$

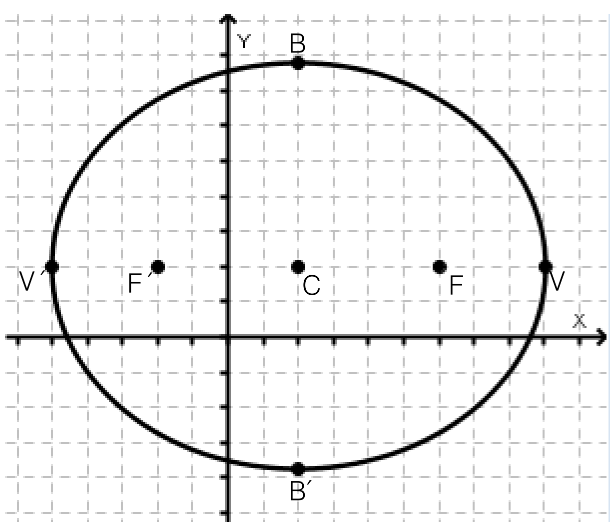
$$4(x^2+10x+25)+3(y^2+2y+1)=432$$

$$4x^2+40x+100+3y^2+6y+3=432$$

$$4x^2+3y^2+40x+6y-329=0$$



Ejemplo 3.
Encontrar la ecuación de la elipse cuya gráfica es:



En la gráfica se observa que la longitud del semieje mayor es 7, y el semieje focal es 4, con centro en el punto $C(2,\ 2)$; el semieje menor no se puede calcular con exactitud en la gráfica, es necesario hacerlo por medio del Teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$
$$b = \sqrt{(7)^2 - (4)^2}$$
$$b = \sqrt{49 - 16}$$
$$b = \sqrt{33}$$
$$b \approx 5.7$$

En la gráfica también se observa que la elipse es horizontal, y utilizando la forma ordinaria correspondiente para sustituir el centro, el semieje mayor y el semieje menor la ecuación queda:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{(x-2)^2}{(7)^2} + \frac{(y-2)^2}{\left(\sqrt{33}\right)^2} = 1$$
$$\frac{(x-2)^2}{49} + \frac{(y-2)^2}{33} = 1$$
$$1617\left(\frac{(x-2)^2}{49} + \frac{(y-2)^2}{33}\right) = (1)1617$$
$$33(x-2)^2 + 49(y-2)^2 = 1617$$
$$33\left(x^2 - 4x + 4\right) + 49\left(y^2 - 4y + 4\right) = 1617$$
$$33x^2 - 132x + 132 + 49y^2 - 196y + 196 = 1617$$
$$33x^2 + 49y^2 - 132x - 196y - 1289 = 0$$

Sitios Web recomendados:

En el siguiente sitio encontrarás la forma en que se grafica la elipse, así como algunos de sus elementos y su ecuación.

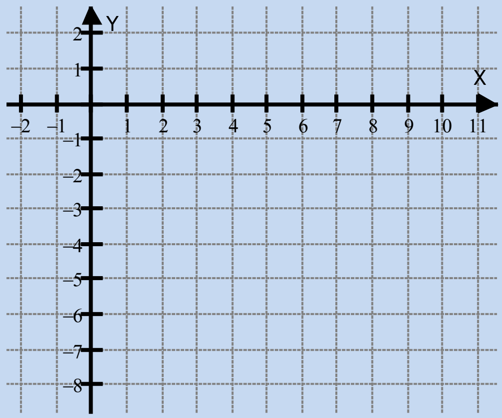
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Lugares_geometricos_conicas/elipse.htm

Actividad: 3

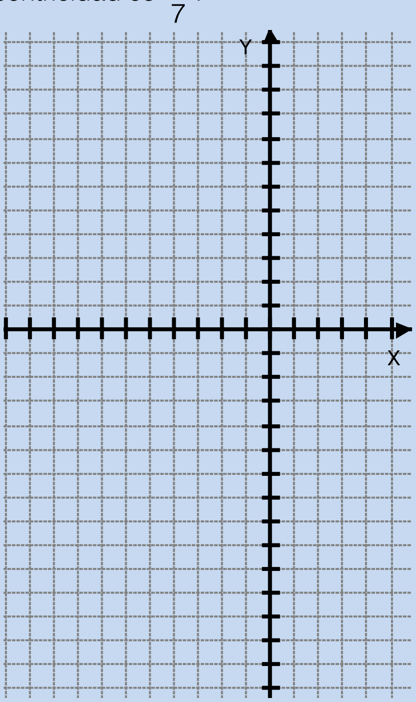
Encuentra lo que se pide en cada sección.

I. Encuentra la forma ordinaria, los elementos y la gráfica de la elipse que cumple con las siguientes condiciones.

a) Su centro es el punto $C(5,-3)$, la longitud del eje mayor es 10 y la coordenada de uno de los focos es $F(7,-3)$.

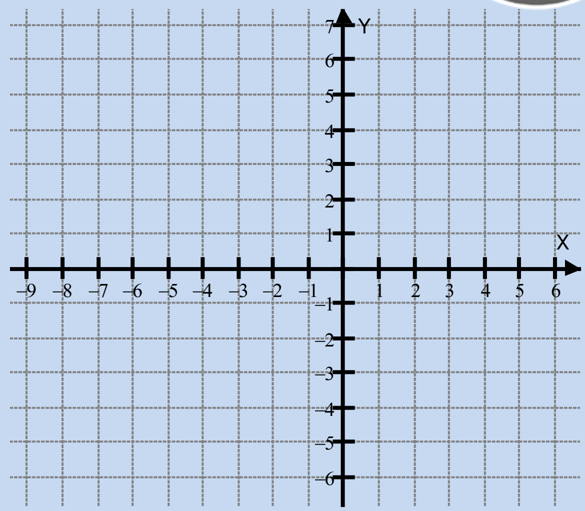


b) Las coordenadas de los focos son $F(-3,2)$ y $F'(-3,-10)$, y su excentricidad es $\dfrac{3}{7}$.

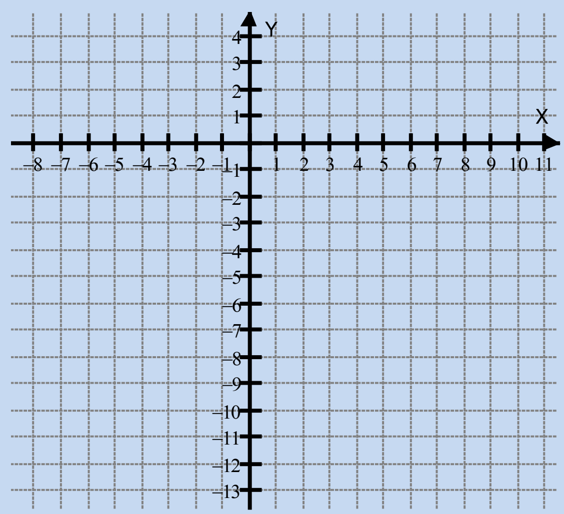


Actividad: 3 (continuación)

c) El centro es $C(-1, 0)$, uno de sus focos es el punto $F\left(-1+\sqrt{33}, 0\right)$ y la longitud del lado recto es $\frac{32}{7}$.



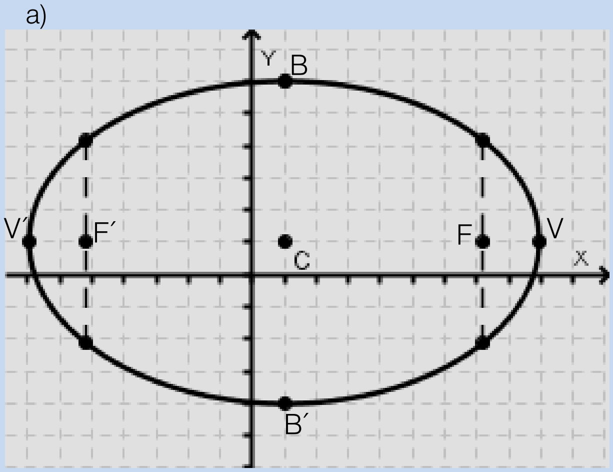
d) Su centro es $C(3, -4)$, Vértice $V(3,4)$ y $B(7,-4)$.



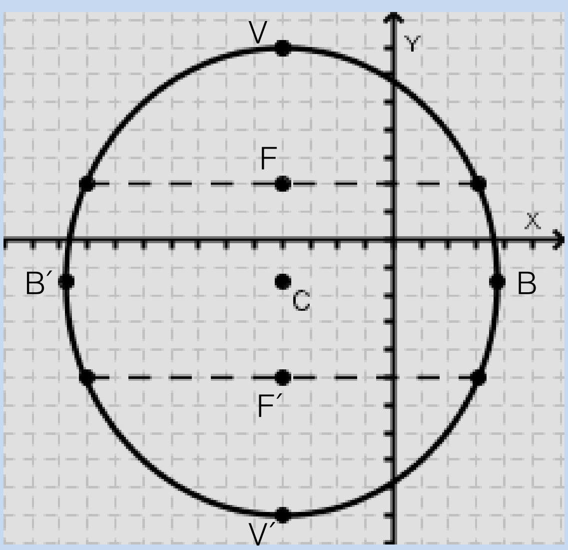
Actividad: 3 (continuación)

II. Expresa la ecuación y los elementos de la elipse cuya gráfica es:

a)

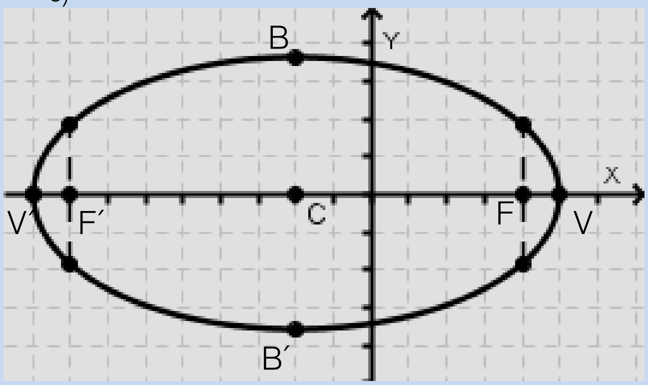


b)

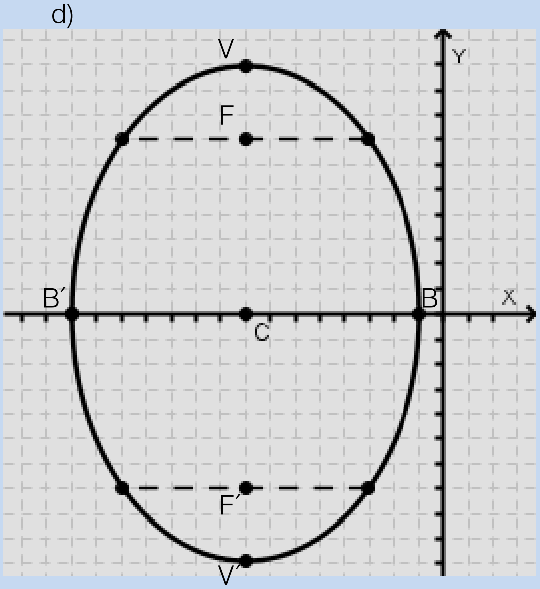


Actividad: 3 (continuación)

c)



d)



Evaluación						
Actividad: 3	Producto: Ejercicios.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Identifica los elementos de la elipse con centro fuera del origen a partir de ciertas condiciones.	Determina la ecuación de la elipse a partir de ciertos elementos.			Reconoce la necesidad de sus habilidades algebraicas previas para la obtención de elementos que no se proporcionan directamente, con el fin de obtener la ecuación de la elipse.		
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

Ecuación general de la elipse.

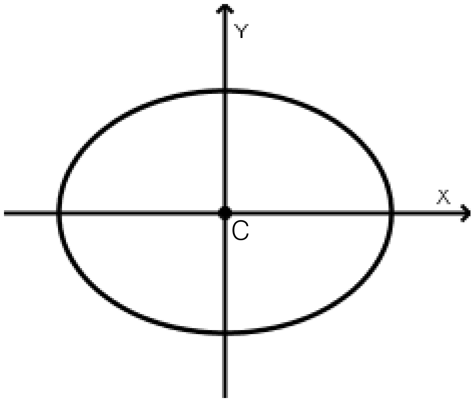
Como se ha observado en las secuencias anteriores, la ecuación general de la elipse tiene la forma:

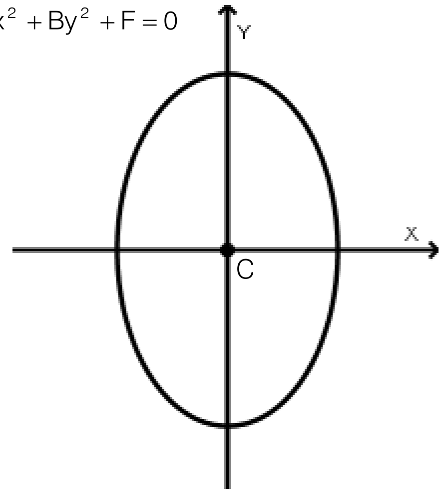
$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si se considera A=B, se tendría el caso particular de la circunferencia.
Si $A < B$ la elipse es horizontal.
Si $A > B$ la elipse es vertical.

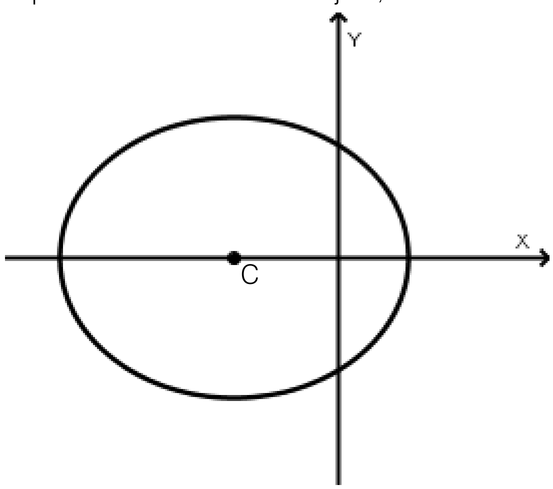
Ahora se realizará un análisis de los coeficientes de la ecuación general, dadas ciertas condiciones de la elipse.

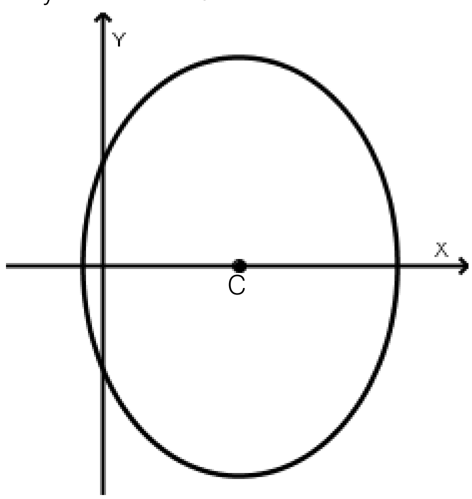
a) Si el centro de la elipse es el origen, su ecuación es $Ax^2 + By^2 + F = 0$



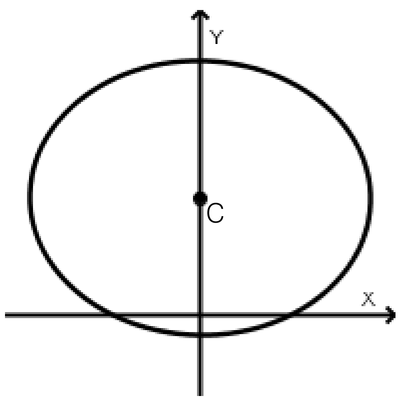


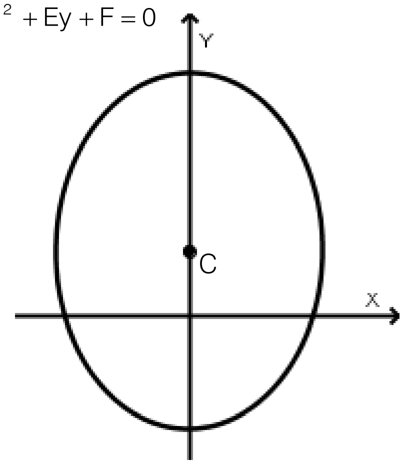
b) Si la elipse tiene su centro en el eje X, su ecuación es $Ax^2 + By^2 + Dx + F = 0$



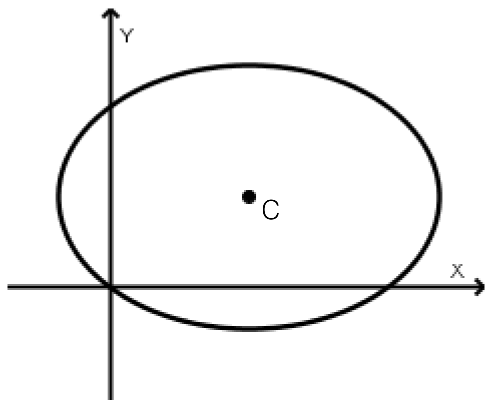


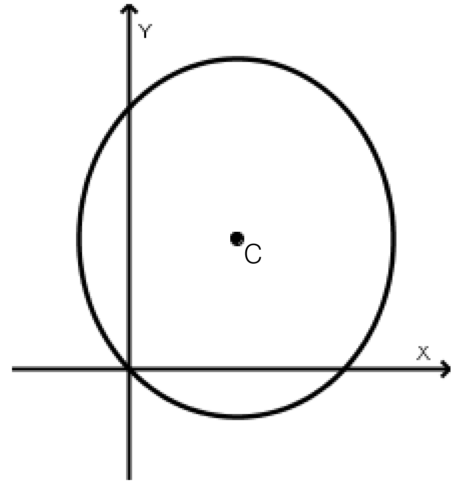
c) Si la elipse tiene su centro en el eje Y, su ecuación es $Ax^2 + By^2 + Ey + F = 0$





d) Si la elipse pasa por el origen, su ecuación es $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey = 0$





Al igual que en la circunferencia, se completa el trinomio cuadrado perfecto para transformar la ecuación general de la elipse a su forma ordinaria, con la finalidad de conocer algunos de sus elementos para trazar su gráfica.

Para visualizar en forma sencilla la transformación de la ecuación general de la elipse a la forma ordinaria, se muestra a continuación un ejemplo concreto.

Ejemplo 1.
El procedimiento para encontrar los elementos necesarios y trazar la gráfica de la elipse, cuya ecuación es $16x^2 + 25y^2 + 64x + 50y - 311 = 0$, se explicarán paso a paso, en la siguiente tabla.

Transformación de la ecuación de la elipse a la forma ordinaria.	Descripción
$16x^2 + 25y^2 + 64x + 50y - 311 = 0$	Se tiene la ecuación de la elipse.
$16x^2 + 25y^2 + 64x + 50y = 311$	Se envía la constante al otro lado de la igualdad.
$[16x^2 - 64x] + [25y^2 + 50y] = 311$	Se acomodan las variables de tal manera que queden las mismas literales juntas.
$16[x^2 - 4x] + 25[y^2 + 2y] = 311$	Se factoriza, por factor común, el coeficiente de los términos cuadráticos.
$16[x^2 - 4x + (-2)^2] + 25[y^2 + 2y + (1)^2] = 311 + 16(-2)^2 + 25(1)^2$	Se completa el trinomio cuadrado perfecto, añadiendo a cada binomio, la mitad del término lineal elevado al cuadrado; para que no se altere la ecuación, se deben agregar los términos que se añadieron del lado izquierdo de la ecuación, sólo que se deben multiplicar por los coeficientes factorizados, ya que éstos multiplican a los términos agregados en los corchetes.
$16[x^2 - 4x + 4] + 25[y^2 + 2y + 1] = 400$	Se expresan los trinomios cuadrados perfectos.
$16(x-2)^2 + 25(y+1)^2 = 400$	Se factorizan los trinomios y se expresan los binomios al cuadrados.
$\frac{16(x-2)^2 + 25(y+1)^2}{400} = \frac{400}{400}$	Se divide la ecuación entre el número que está del lado derecho de la ecuación.
$\frac{16(x-2)^2}{400} + \frac{25(y+1)^2}{400} = 1$	Se separan los cocientes y se divide el lado derecho, obteniendo 1 como resultado.

$\dfrac{(x-2)^2}{\dfrac{400}{16}}+\dfrac{(y+1)^2}{\dfrac{400}{25}}=1$	Se invierte la ley de la tortilla, para enviar el coeficiente de los binomios como denominador del denominador de la ecuación.
$\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$	Se expresa la forma ordinaria de la elipse.
$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	Se compara la forma ordinaria obtenida con la forma ordinaria de la elipse horizontal, ya que el denominador mayor está debajo del binomio de la variable “x”.
El centro es el punto $C(2,-1)$, $a=\sqrt{25}=5$ y $b=\sqrt{16}=4$	Se obtienen el valor del centro, el semieje mayor y el semieje menor.

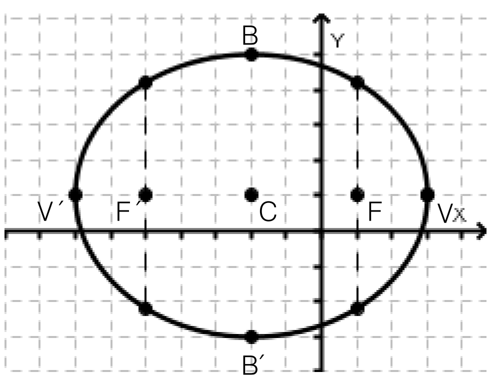
Para poder graficar la elipse, se requiere conocer el semieje focal y la longitud del lado recto. Utilizando el Teorema de Pitágoras, el semieje focal es:

$$a^2=b^2+c^2$$
$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$
$$c=\sqrt{(5)^2-(4)^2}$$
$$c=\sqrt{25-16}$$
$$c=\sqrt{9}$$
$$c=3$$

La longitud del lado recto es:

$$LLR=\frac{2b^2}{a}$$
$$LLR=\frac{2(4)^2}{5}$$
$$LLR=\frac{32}{5}$$
$$LLR=6.4$$

Con esto, se pueden ubicar los extremos del lado recto, a 3.2 unidades hacia arriba y debajo de los focos.



Por lo tanto, la gráfica queda de la siguiente forma.

Ejemplo 2.

Encontrar las coordenadas de los focos, si la ecuación de la elipse es $6x^2+4y^2+36x-16y+46=0$.

Para conocer las coordenadas de los focos, primero se debe conocer el tipo de elipse, el centro y el semieje focal, para ello, se transforma la ecuación de la elipse en su forma ordinaria, como se muestra a continuación.

$$6x^2+4y^2+36x-16y+46=0$$
$$6x^2+4y^2+36x-16y=-46$$
$$\left[6x^2+36x\right]+\left[4y^2-16y\right]=-46$$
$$6\left[x^2+6x\right]+4\left[y^2-4y\right]=-46$$
$$6\left[x^2+6x+(3)^2\right]+4\left[y^2-4y+(-2)^2\right]=-46+6(3)^2+4(-2)^2$$
$$6\left[x^2+6x+9\right]+4\left[y^2-4y+4\right]=24$$
$$6(x+3)^2+4(y-2)^2=24$$
$$\frac{6(x+3)^2}{24}+\frac{4(y-2)^2}{24}=\frac{24}{24}$$
$$\frac{(x+3)^2}{\frac{24}{6}}+\frac{(y-2)^2}{\frac{24}{4}}=1$$
$$\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{6}=1$$

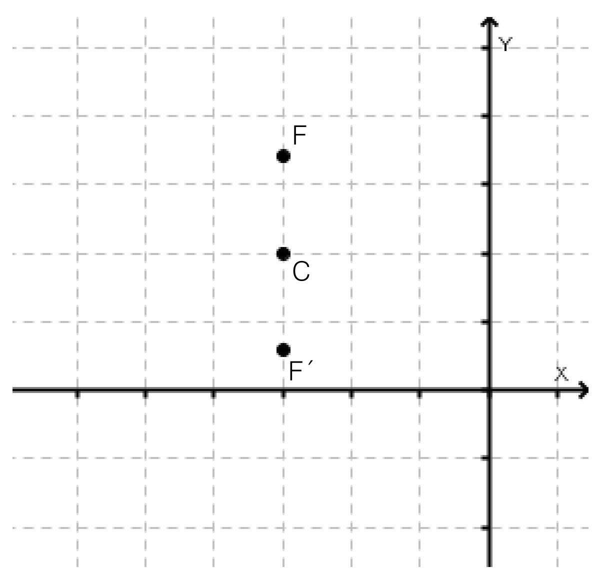
Como el denominador mayor está debajo de la variable "y", corresponde a una elipse vertical, y comparando las formas ordinarias se obtiene el centro y los semiejes mayor y menor.

$$\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{6}=1$$
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

El centro es $C(-3,\,2)$, la longitud del semieje mayor es $\sqrt{6}$ y la del semieje menor es $\sqrt{4}=2$.

La longitud del semieje focal se obtiene con el teorema de Pitágoras.

$$a^2=b^2+c^2$$
$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$
$$c=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-(2)^2}$$
$$c=\sqrt{6-4}$$
$$c=\sqrt{2}$$
$$c\approx 1.4$$



Los focos se encuentran a $\sqrt{2}$ unidades hacia arriba y abajo del centro, como se muestra en la gráfica.

Las coordenadas de los focos son:

$$F\left(-3,\,2+\sqrt{2}\right)\approx(-3,\,3.4)$$
$$F'\left(-3,\,2-\sqrt{2}\right)\approx(-3,\,0.6)$$

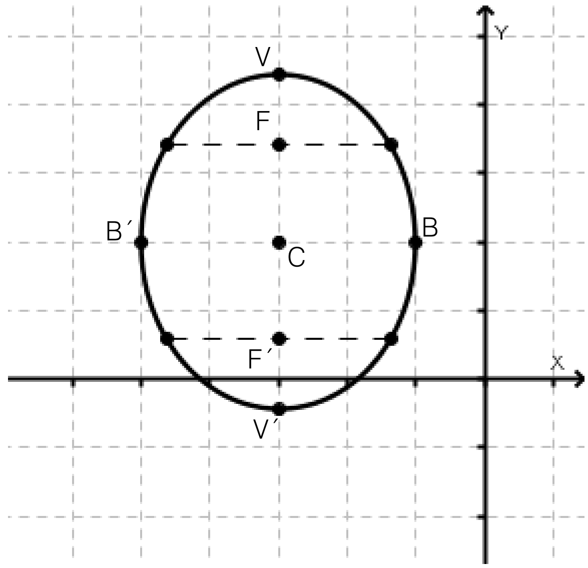
Para terminar la gráfica, se obtiene la longitud del lado recto.

$$LLR = \frac{2b^2}{a}$$

$$LLR = \frac{2(2)^2}{\sqrt{6}}$$

$$LLR = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$LLR \approx 3.3$$



Ejemplo 3.

Encontrar la excentricidad de la elipse cuya ecuación es $4x^2 + 9y^2 - 144 = 0$.

En este caso no se requiere completar el trinomio cuadrado perfecto, puesto que es una elipse con centro en el origen, porque carece de los términos lineales.

$$4x^2 + 9y^2 - 144 = 0$$

$$4x^2 + 9y^2 = 144$$

$$\frac{4x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{\frac{144}{4}} + \frac{y^2}{\frac{144}{9}} = 1$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Como el denominador mayor está debajo de la variable "x", la elipse es horizontal; la longitud del semieje mayor es $\sqrt{36} = 6$, y la del semieje menor es $\sqrt{16} = 4$.

Para conocer la excentricidad se requiere la longitud del semieje focal, la cual es:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

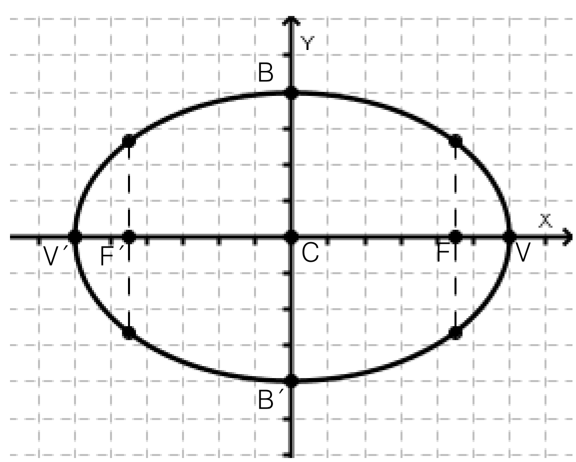
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{(6)^2 - (4)^2}$$

$$c = \sqrt{36 - 16}$$

$$c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$c \approx 4.5$$



Por lo tanto, la excentricidad es:

$$e = \frac{c}{a}$$

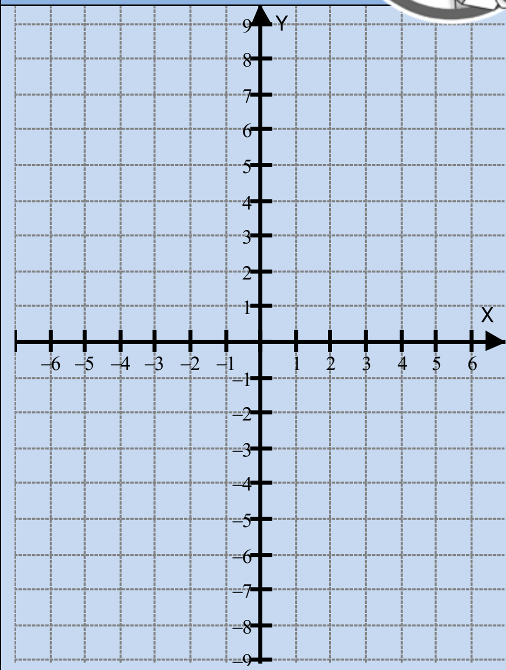
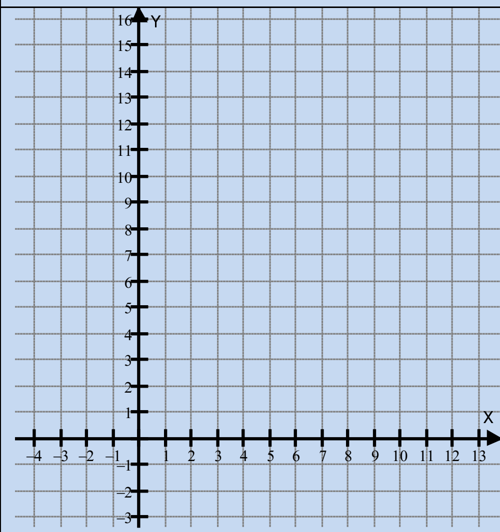
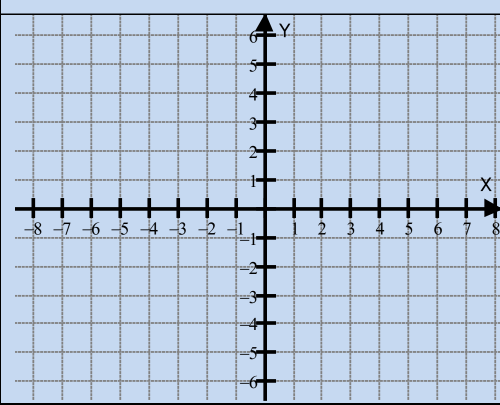
$$e = \frac{\sqrt{20}}{6} = \frac{2\sqrt{5}}{6}$$

$$e = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

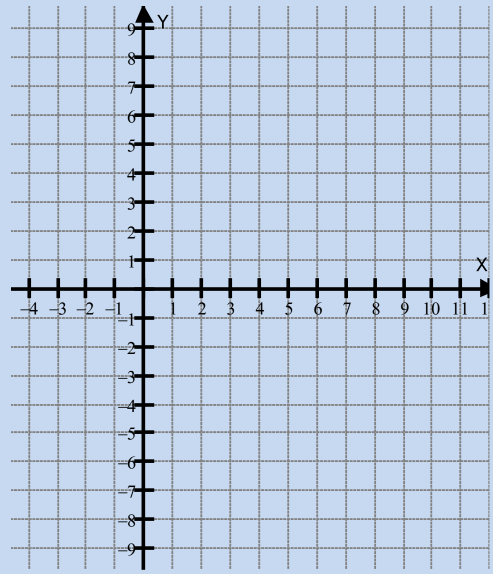
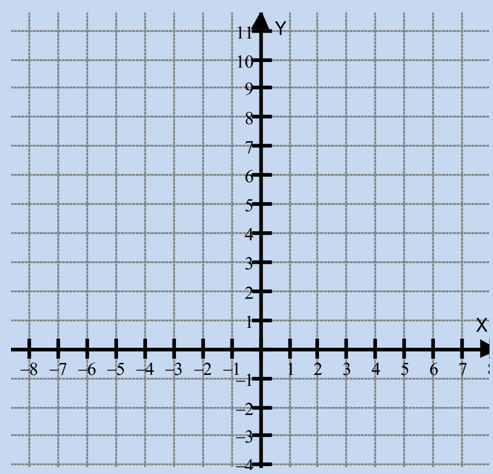
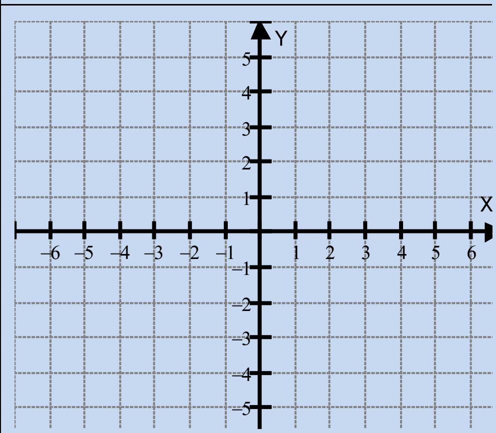
$$e \approx 0.75$$

Actividad: 4 (continuación)

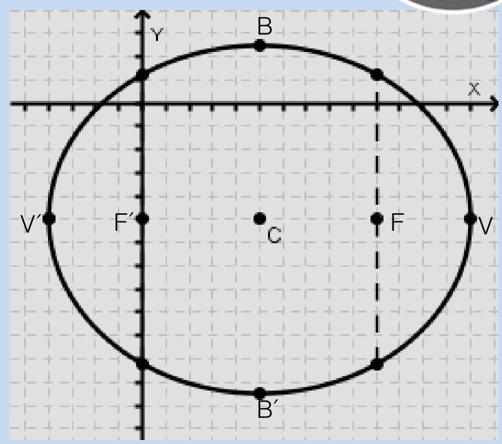
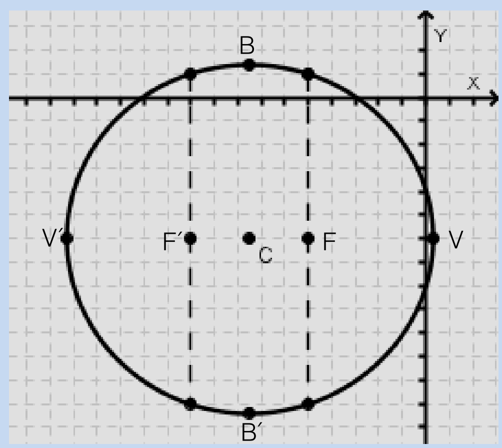
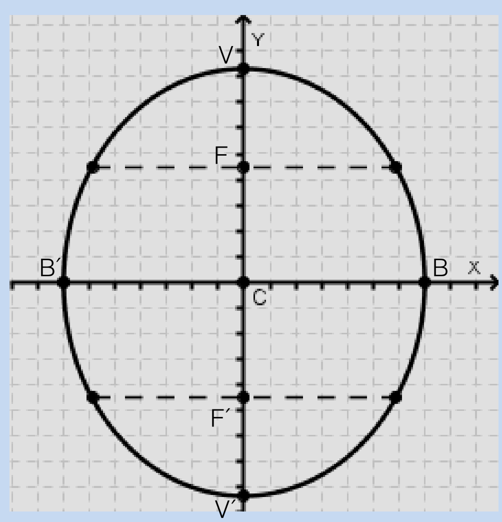
Completa la siguiente tabla.

Ecuación en su forma general	Centro	Semiejes	Ecuación en su forma ordinaria	Gráfica
$328x^2 + 128y^2 - 5248 = 0$		a = b = c =		
$50x^2 + 122y^2 - 400x + 2440y + 9950 = 0$		a = b = c =		
$15x^2 + 64y^2 - 960 = 0$		a = b = c =		

Actividad: 4 (continuación)

Ecuación en su forma general	Centro	Semiejes	Ecuación en su forma ordinaria	Gráfica
$64x^2 + 39y^2 - 640x - 896 = 0$		a = b = c =		
$4x^2 + 5y^2 - 40y - 100 = 0$		a = b = c =		
$4x^2 + 25y^2 - 225 = 0$		a = b = c =		

Actividad: 4 (continuación)

<table>
<tr><th>Ecuación en su forma general</th><th>Centro</th><th>Semiejes</th><th>Ecuación en su forma ordinaria</th><th>Gráfica</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>a =
b =
c =</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>a =
b =
c =</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>a =
b =
c =</td><td></td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 4</td><td colspan="3">Producto: Complementación de la tabla.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica los elementos de la elipse, a partir de su ecuación y viceversa.</td><td colspan="3">Obtiene los elementos de una elipse a partir de su ecuación y viceversa.</td><td colspan="2">Muestra interés en realizar la actividad y aprecia el método de completar trinomio cuadrado perfecto, para la obtención de sus elementos y la realización de su gráfica.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

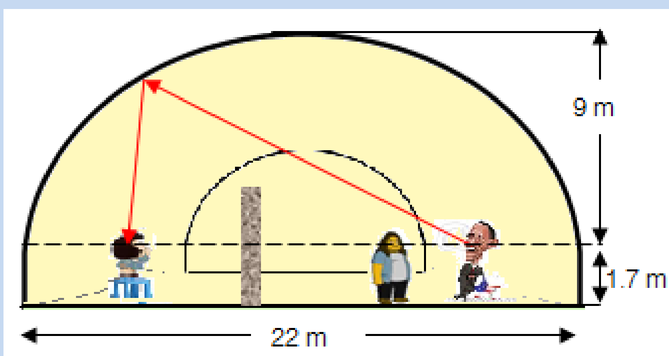
■ Cierre

Actividad: 5

Resuelve los siguientes problemas.

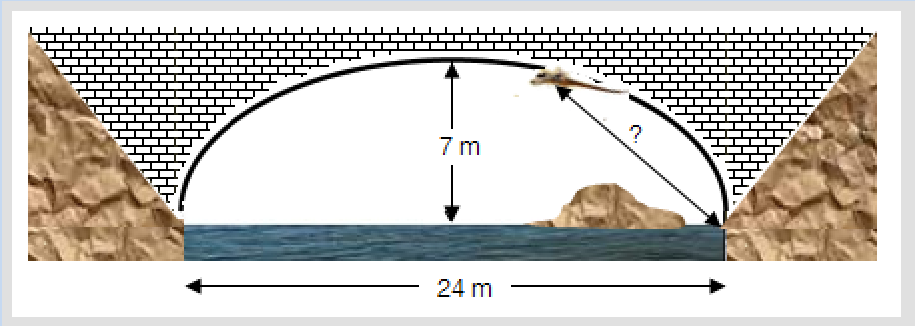
1. En la figura se muestra las especificaciones de un salón con techo elíptico; el presidente de EUA se encuentra en el foco de la elipse descrita dándole indicaciones a su asistente, debido a la estructura del salón las instrucciones las escucha Mafalda como si estuviera enseguida del presidente, ya que está situada en el otro foco de la elipse.

a) Calcula la distancia a la que se encuentran los dos personajes.
b) Encuentra la ecuación de la elipse que describe el techo.
c) ¿Cuál es la distancia mínima entre el oído de Mafalda y el techo?



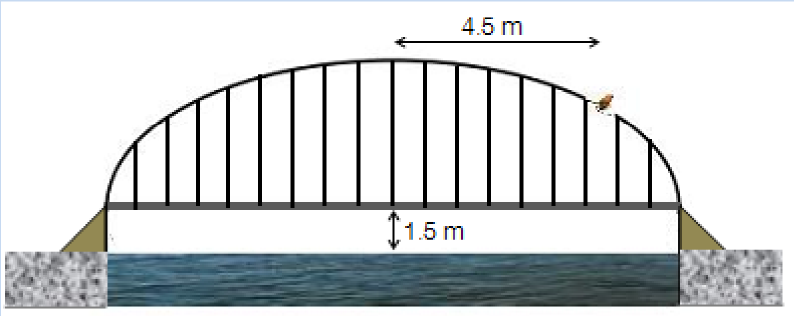
Actividad: 5 (continuación)

2. Un puente es soportado por una semielipse, el cual se usa para cruzar un río de 24 metros de ancho y el arco elíptico mide 7 metros de alto.
   a) ¿Cuál es la ecuación del arco?
   b) Si una lagartija reposa en el arco a 6.5 m del nivel del agua, ¿a qué distancia se encuentra de la orilla del rio?



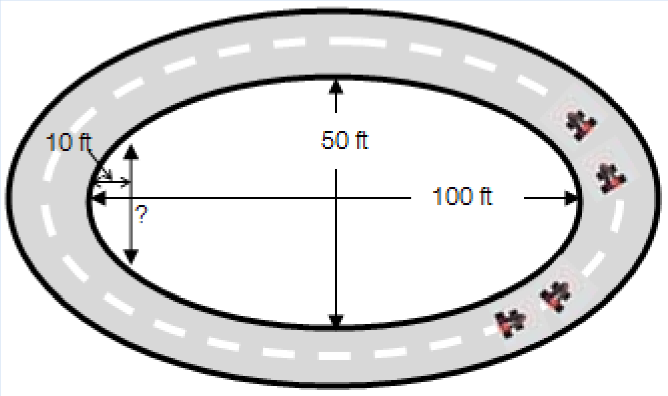
Actividad: 5 (continuación)

3. La forma de un puente semielíptico está descrita por la ecuación $x^2 + 4y^2 - 12x - 8y + 4 = 0$, si un ave está parada sobre el puente, a una distancia de 4.5 m del soporte central, ¿encuentra la distancia entre el ave y la superficie del río?



Actividad: 5 (continuación)

4. Una pista de carreras tiene la forma de una elipse de 100 pies de largo y 50 pies de ancho. ¿Qué ancho tiene a 10 pies de un extremo?



Actividad: 5 (continuación)

5. La distancia de Marte al centro de su órbita elíptica es de 142 millones de millas. Si la distancia más cercana al sol es de 128.5 millones de millas, ¿cuál es la distancia de Marte al sol, cuando éste se encuentra en el punto más lejano?, escribe la ecuación de la órbita de Marte alrededor del sol.

Evaluación						
Actividad: 5	Producto: Problemas de aplicación.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Reconoce los elementos básicos para resolver problemas cotidianos que estén relacionados con la elipse.	Aplica los elementos básicos, así como la ecuación de la elipse, para dar solución a problemas cotidianos.			Participa activamente en la resolución de los problemas en los que se pone en juego el uso de la elipse.		
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

BLOQUE 7

Utiliza la parábola.

Competencias disciplinares básicas:

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Unidad de competencia:

- Construye e interpreta modelos sobre la parábola como lugar geométrico al resolver problemas derivados de situaciones reales, hipotéticas o teóricas.
- Interpreta tablas, gráficas y expresiones simbólicas en distintas representaciones de la parábola.
- Argumenta la pertinencia de utilizar una forma específica de la ecuación de la parábola dependiendo de la naturaleza de la tarea que tenga que realizar.

Atributos a desarrollar en el bloque:

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
8.1 Propone maneras de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
8.3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Tiempo asignado: 12 horas

Secuencia didáctica 1.
Caracterización geométrica.

Inicio

Actividad: 1

Realiza lo que se pide.

1. Traza una parábola, siguiendo su definición como lugar geométrico.

Parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta (directriz) y un punto fijo (foco).

2. Describe los elementos de la parábola.

3. Explica qué aplicaciones conoces de la parábola en tu entorno y de qué manera te ha sido útil.

Evaluación					
Actividad:1	Producto: Descripción.			Puntaje:	
Saberes					
Conceptual	Procedimental			Actitudinal	
Identifica los elementos y la aplicación de la parábola.	Relaciona la definición de parábola con su gráfica.			Reflexiona sobre lo solicitado en la actividad y es propositivo al realizar las descripciones.	
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente	

Desarrollo

Actividad: 2

En equipo, investiga cinco aplicaciones de la parábola, describe cada una de ellas, añade las imágenes correspondientes y entrega un reporte escrito a tu profesor. El reporte deberá contener:

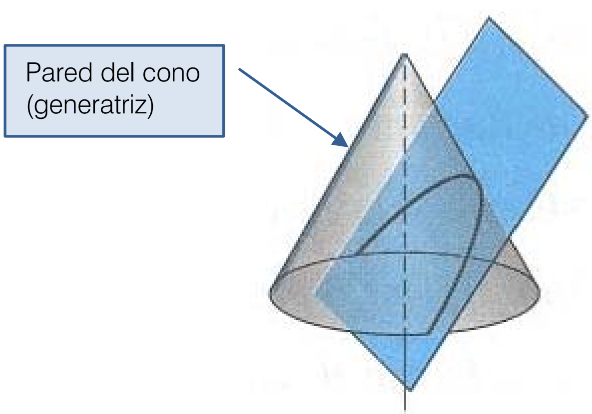
a) Portada.
b) Contenido.
c) Conclusiones.
d) Fuentes de investigación.

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad:2</td><td colspan="3">Producto: Investigación.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Selecciona, de diferentes fuentes, información de la aplicación de la parábola.</td><td colspan="3">Investiga la aplicación de la parábola en su entorno.</td><td colspan="2">Aporta puntos de vista personales con apertura y considera los de otras personas.

Entrega su reporte en tiempo y forma.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Coevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

La parábola como lugar geométrico.

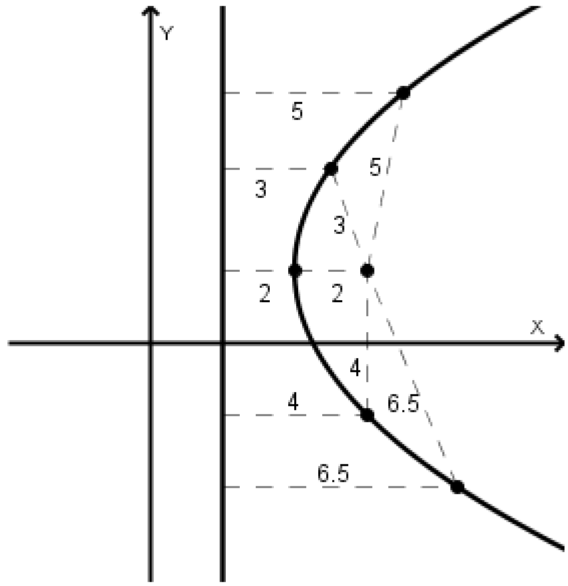
La parábola, como figura cónica, se obtiene a partir del corte de un plano con el cono, dicho corte se realiza paralelo a la pared del cono (generatriz).



En el **bloque 1** abordaste el tema de lugar geométrico, y en él, descubriste el trazo de la parábola tomando como base un punto fijo y una recta fija. A continuación se enuncia la definición de la parábola como lugar geométrico.

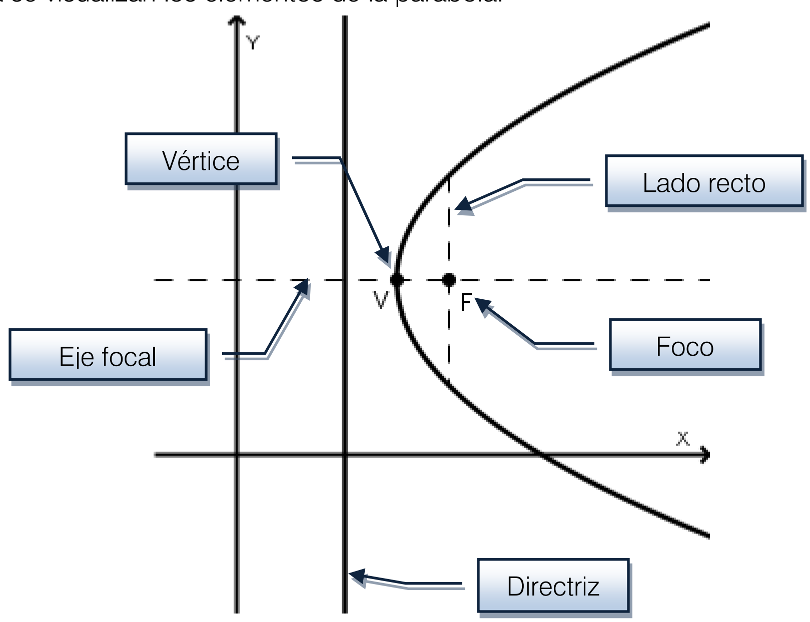
Una *parábola* es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta fija (directriz) y un punto fijo (foco).

En la siguiente gráfica se muestra cómo la distancia de los puntos que están en la parábola al punto fijo llamado *foco*, es igual a la distancia del punto a la recta fija conocida como *directriz*.



Elementos de la parábola.

En la siguiente gráfica se visualizan los elementos de la parábola.

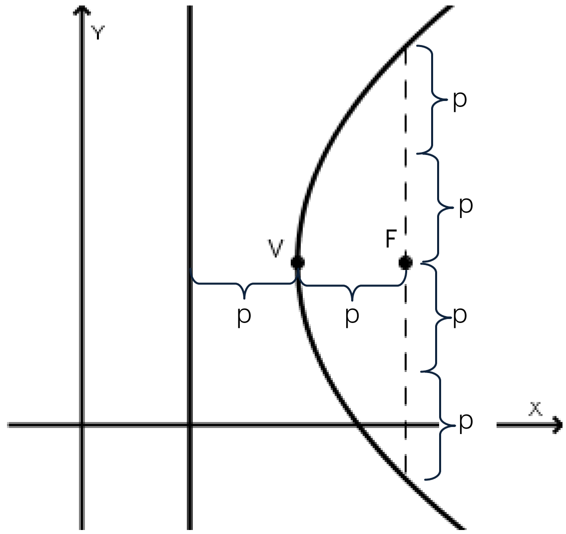


Foco: Punto fijo del cual se genera la parábola.
Vértice: Punto de la parábola más cercano tanto a la directriz, como al foco.
Directriz: Recta fija de la cual se genera la directriz.
Eje focal: Recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz.
Lado recto: Segmento que une a dos puntos de la parábola, el cual pasa por el foco y es perpendicular al eje focal.
Distancia focal: Distancia que existe entre el vértice y el foco se le denota con la letra “p”.

La longitud del Lado recto equivale a cuatro veces la distancia focal, esto es, a 4p.

$$LLR = 4p$$

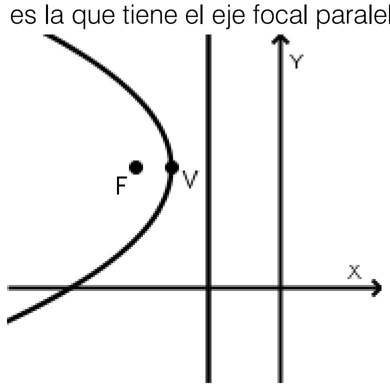
En la siguiente gráfica se visualiza las longitudes antes descritas.



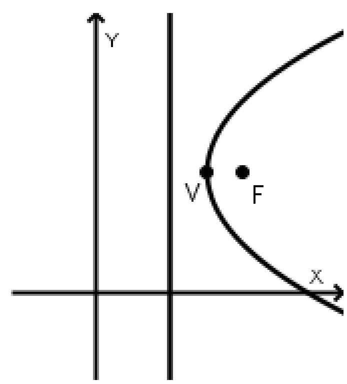
Al igual que en la elipse, se tienen parábolas horizontales y verticales; las horizontales se abren a la izquierda o a la derecha, y la verticales se abren hacia arriba o hacia abajo.

A continuación se muestran las gráficas correspondientes al tipo de parábolas.

La *parábola horizontal*: es la que tiene el eje focal paralelo al eje X.

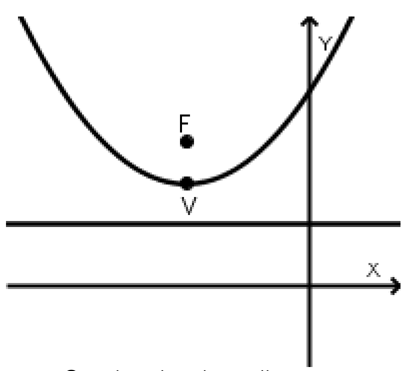


Se abre a la izquierda

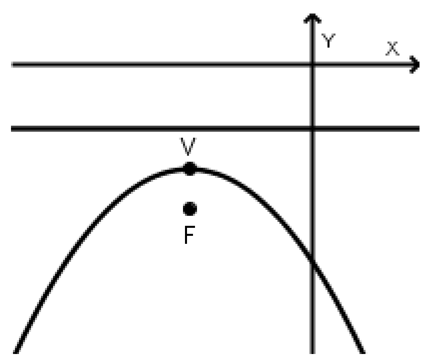


Se abre a la derecha

La *parábola vertical*: es la que tiene el eje focal paralelo al eje Y.



Se abre hacia arriba

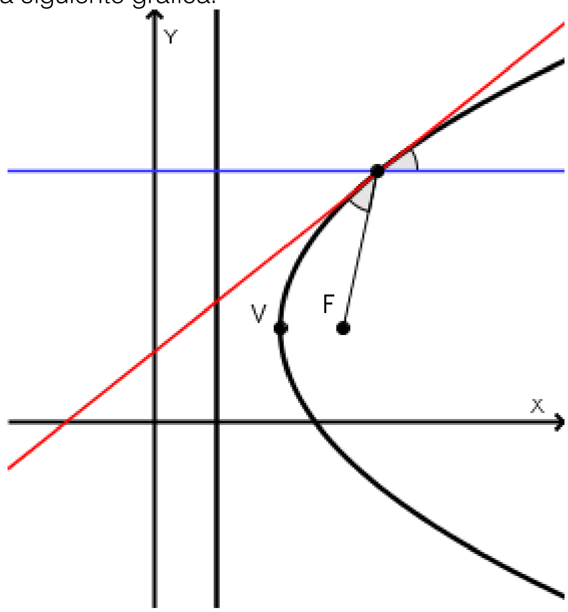


Se abre hacia abajo

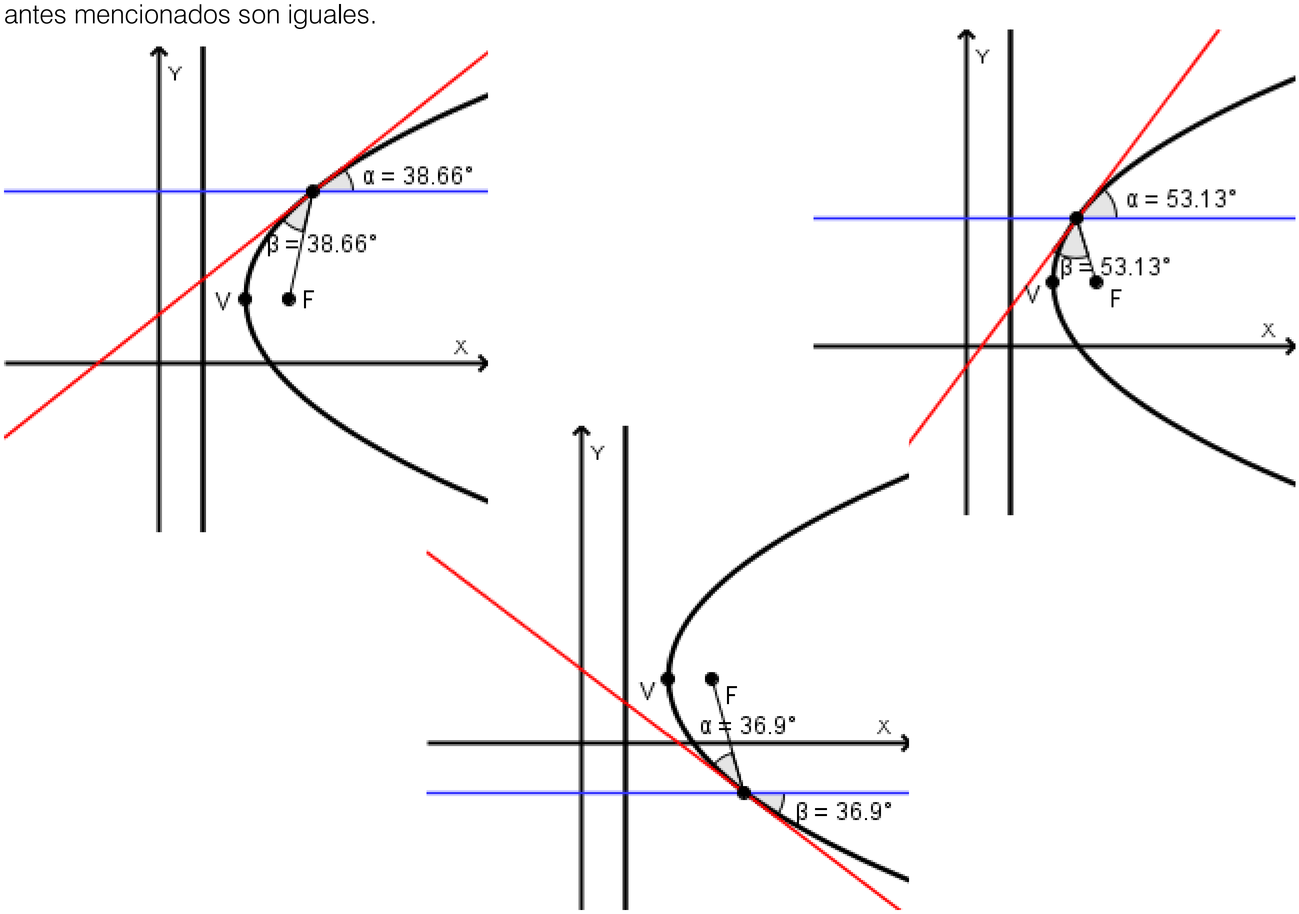
Propiedad de la parábola.

La parábola tiene una importante propiedad focal, la cual manifiesta: si se une mediante un segmento cualquier punto P de la parábola con su foco, el ángulo que forma este segmento con la tangente en ese punto, es igual al ángulo que forma la tangente en ese punto con la recta paralela al eje de la parábola.

Lo anterior se puede visualizar en la siguiente gráfica.



A continuación se muestran algunas gráficas, en las que puedes comprobar con un transportador que los ángulos antes mencionados son iguales.



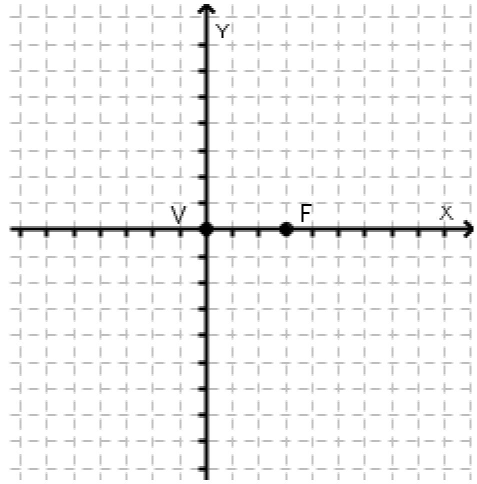
Gráfica de la parábola.

Para graficar la parábola se traza la recta directriz, el foco, el vértice y los extremos del lado recto; en algunos de los casos no se tienen todos estos elementos, y se recurre a la fórmula de punto medio, longitud del lado recto, entre otras, para conocerlos.

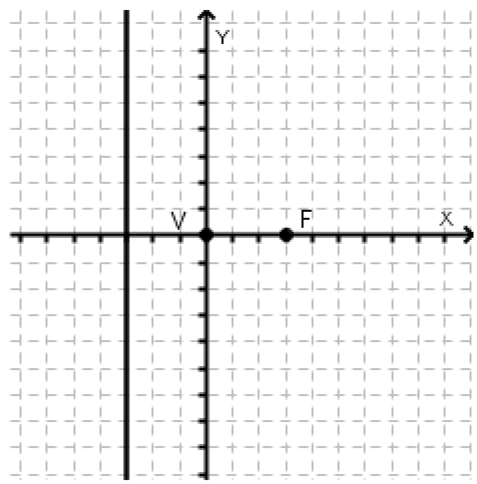
A continuación se muestra la forma de graficar la parábola.

Ejemplo 1.
Trazar la gráfica de la parábola cuyo vértice es el origen y la coordenada del foco es $F(3,0)$.

Para graficarla se ubican los puntos en el plano cartesiano, y como el foco queda a la derecha del vértice, la parábola se abre hacia la derecha.



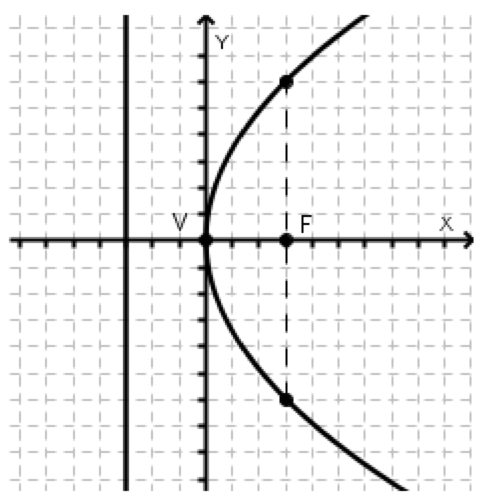
En la gráfica se observa que la distancia del vértice al foco son 3 unidades, por lo tanto $p = 3$, además, si el foco está a 3 unidades a la derecha del vértice, la recta directriz está a 3 unidades a la izquierda, como se muestra a continuación.



Ahora se traza el lado recto, el cual mide 12 unidades. Esta medida resulta de la siguiente fórmula.

$$LLR = 4p$$
$$LLR = 4(3)$$
$$LLR = 12$$

Debido a lo anterior, se ubican los extremos del lado recto a 6 unidades hacia arriba y hacia abajo del foco, de tal modo se puede dibujar la parábola, de forma suave.

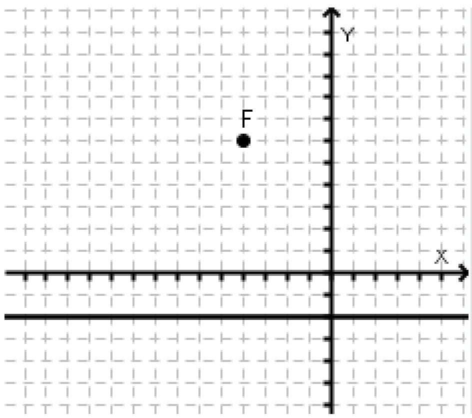


Ejemplo 2.
Graficar la parábola cuyo foco es el punto $F(-4,6)$ y la ecuación de su directriz es la recta $y+2=0$.

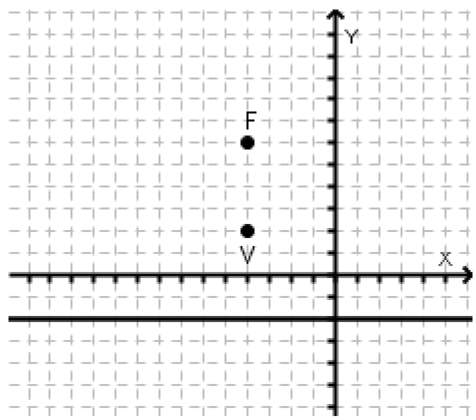
Se grafica el foco en el plano cartesiano, y posteriormente se grafica la directriz, la cual es una recta paralela al eje X, puesto que todos los puntos que están en ella tienen como ordenada –2, esto se puede deducir del despeje de la ecuación, como se muestra a continuación.

$$y+2=0$$
$$y=-2$$

Por ello la directriz se traza de la siguiente forma.



En la gráfica anterior se muestra la recta directriz y el foco, y se sabe que el vértice está en medio de estos dos elementos, así que el vértice se ubica de la siguiente forma.



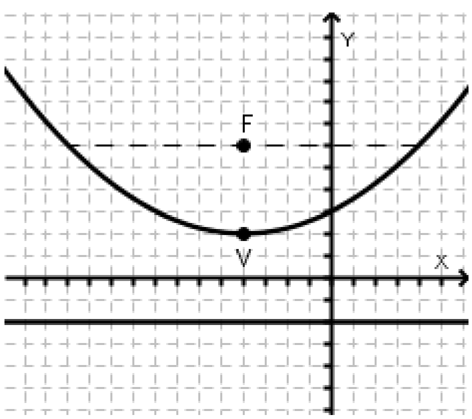
En esta gráfica se observa que la distancia del vértice al foco, o del vértice a la directriz es de 4 unidades, por lo tanto:

$$p=4$$

Ahora se ubican los extremos del lado recto, calculando su longitud con la fórmula:

$$LLR=4p$$
$$LLR=4(4)$$
$$LLR=16$$

Por lo tanto, dichos extremos se ubican a 8 unidades a la izquierda y a la derecha del foco, y de esta forma se traza la parábola.

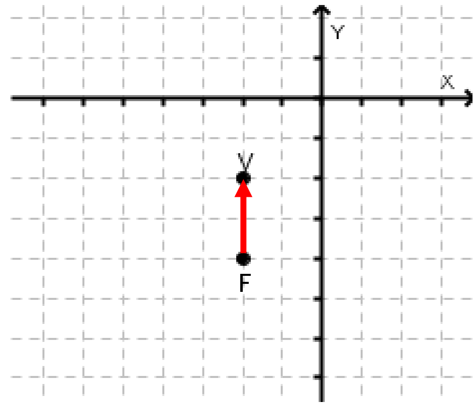


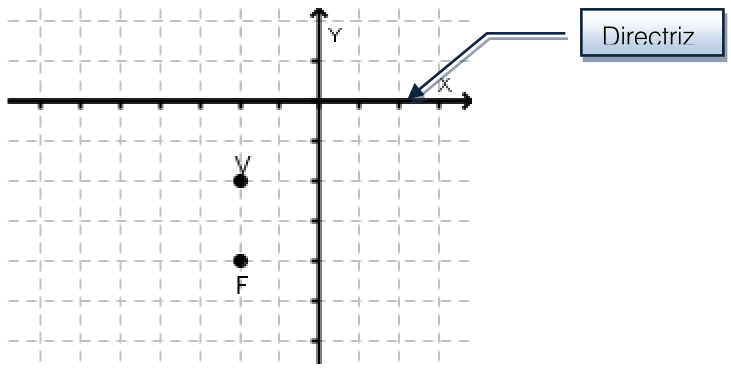
Ejemplo 3.
Graficar la parábola que tiene como foco el punto $F(-2,-4)$, distancia focal 2 y se abre hacia abajo.

Como la parábola se abre hacia abajo, significa que el foco está hacia abajo del vértice a 2 unidades de distancia.

Por lo tanto, el vértice se ubica en el punto $V(-2,-2)$, como se muestra en la gráfica.

Como la distancia focal es 2, la distancia entre el vértice y la directriz también es 2 (dos unidades), y ésta se ubica hacia arriba del vértice, coincidiendo así con el eje X.

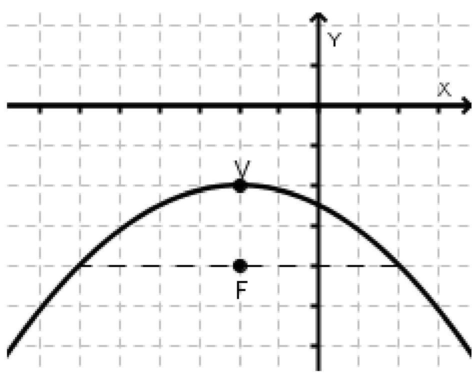




La longitud del lado recto es:

$$LLR = 4p$$
$$LLR = 4(2)$$
$$LLR = 8$$

Por lo tanto, los extremos del lado recto se ubican a 4 unidades a la derecha y a la izquierda del foco, y con ello se puede trazar la gráfica de la parábola.



Sitios Web recomendados:

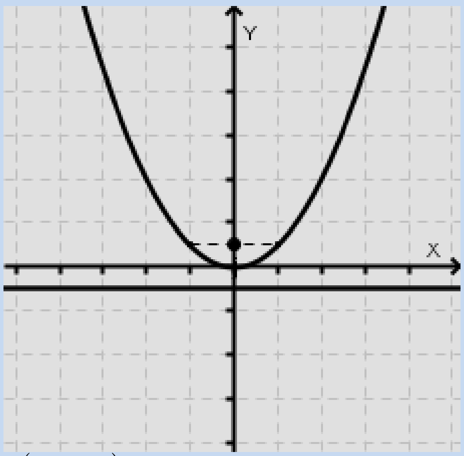
En el siguiente sitio encontrarás gráficas interactivas de parábolas.

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Las_conicas_con_regla_y_compas/generaparab.htm

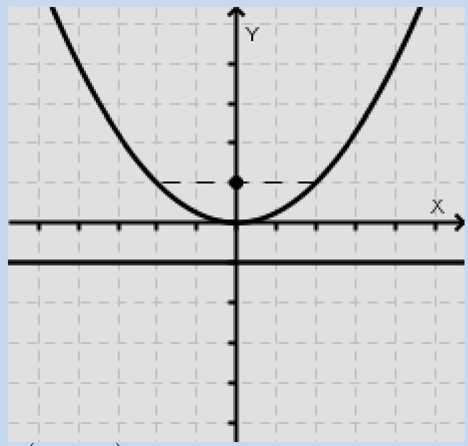
Actividad: 3

Desarrolla lo que se pide en cada sección.

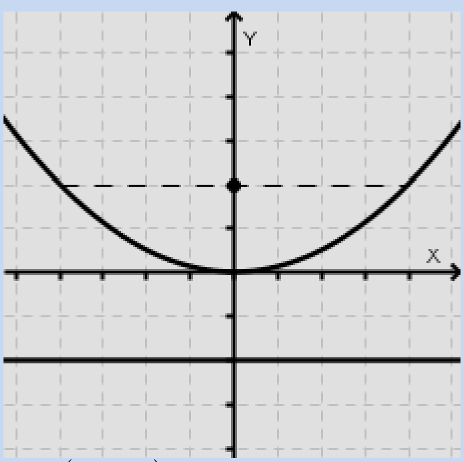
I. Encuentra las coordenadas del vértice y del foco, la distancia focal (p), la longitud del lado recto (LLR) y la ecuación de la directriz, de las parábolas que se muestran a continuación.



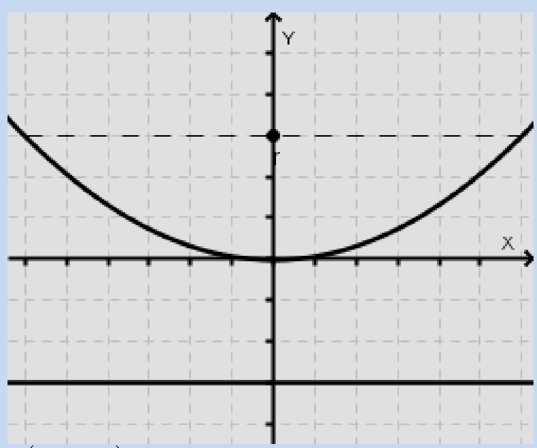
V(,)
F(,)
p=________
LLR=__________
Ec. Directriz=_______________



V(,)
F(,)
p=________
LLR=__________
Ec. Directriz=_______________



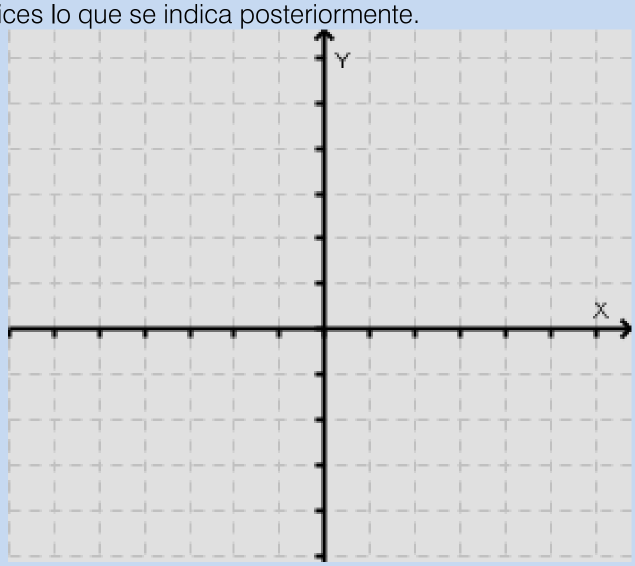
V(,)
F(,)
p=________
LLR=__________
Ec. Directriz=_______________



V(,)
F(,)
p=________
LLR=__________
Ec. Directriz=_______________

Actividad: 3 (continuación)

II. Grafica las parábolas anteriores en un solo cuadrante sin la recta directriz, para que mediante su análisis, realices lo que se indica posteriormente.



a) Observa las parábolas y describe lo que ocurre cuando varía la distancia focal.

b) Si la distancia focal de la parábola es muy cercana al cero, ¿qué cambios sufrirá su abertura?

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 3</td><td colspan="3">Producto: Gráficas.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><td colspan="6">Saberes</td></tr>
<tr><td>Conceptual</td><td colspan="3">Procedimental</td><td colspan="2">Actitudinal</td></tr>
<tr><td>Describe los cambios que sufre la parábola cuando varía la distancia focal.</td><td colspan="3">Analiza el comportamiento gráfico de la parábola con respecto a la distancia focal.</td><td colspan="2">Expresa sus dudas, reconoce y corrige sus errores.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

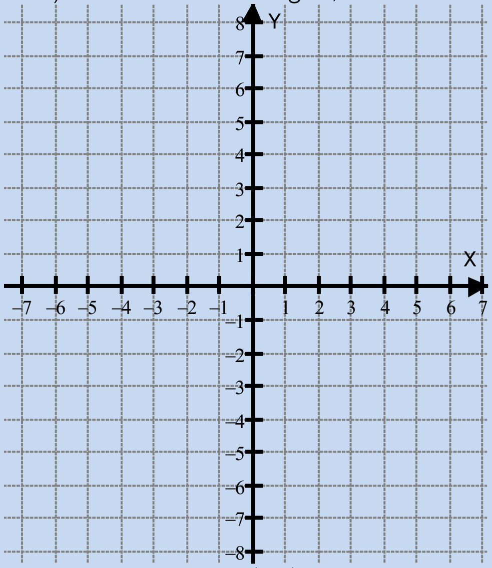
■ Cierre

Actividad: 4

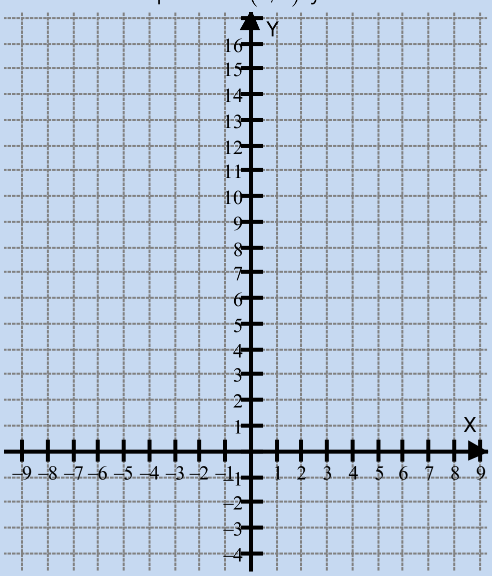
Desarrolla lo que se pide en cada sección.

I. Traza la gráfica de la parábola que cumple con las siguientes condiciones.

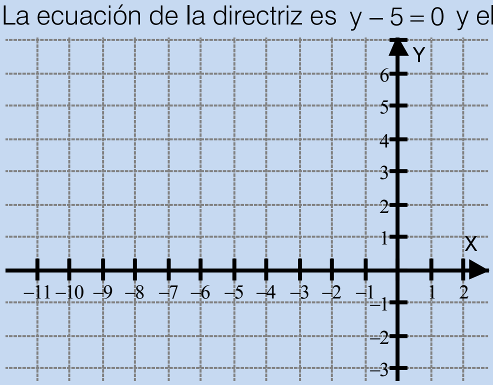
a) Su vértice es el origen, la distancia focal es 3 y se abre hacia la izquierda.



b) Su foco es el punto $F(4,6)$ y la ecuación de la directriz es $x+6=0$.

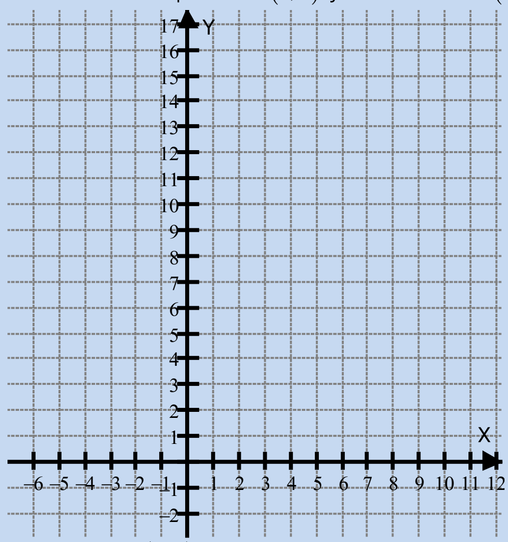


c) La ecuación de la directriz es $y-5=0$ y el foco es el punto $F(-5,0)$.

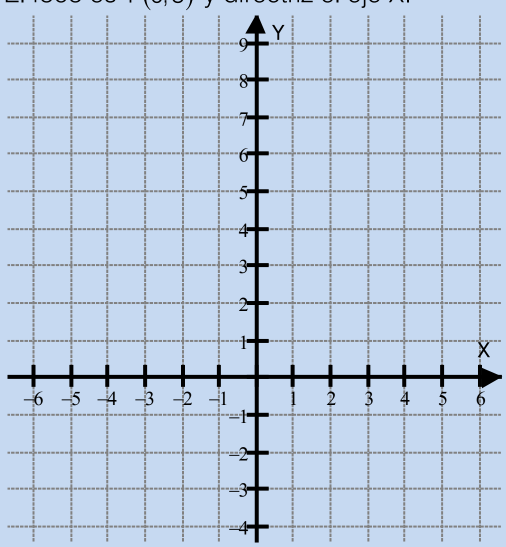


Actividad: 4 (continuación)

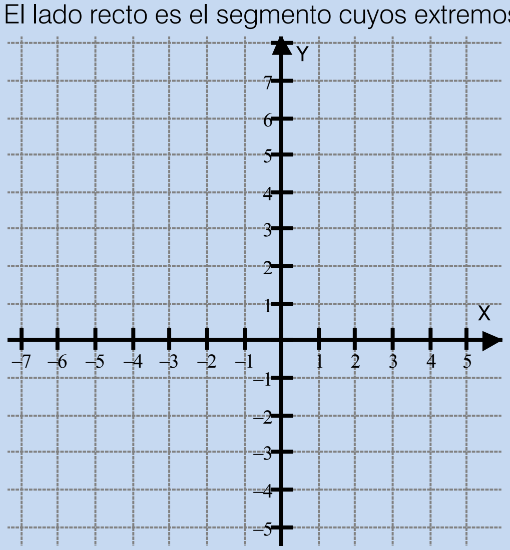
d) El vértice es el punto $V(2,8)$ y su foco es $F(6,8)$.



e) El foco es $F(0,5)$ y directriz el eje X.

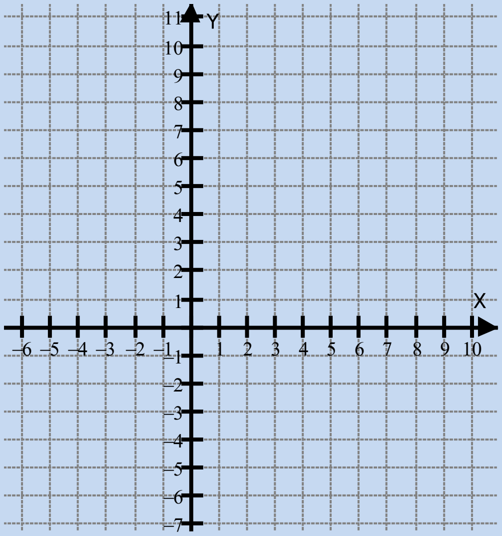


f) El lado recto es el segmento cuyos extremos son $(2,-4)$ y $(2,6)$, además, se abre a la derecha.

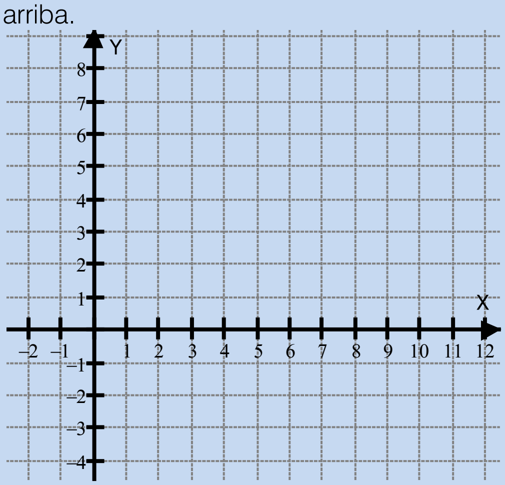


Actividad: 4 (continuación)

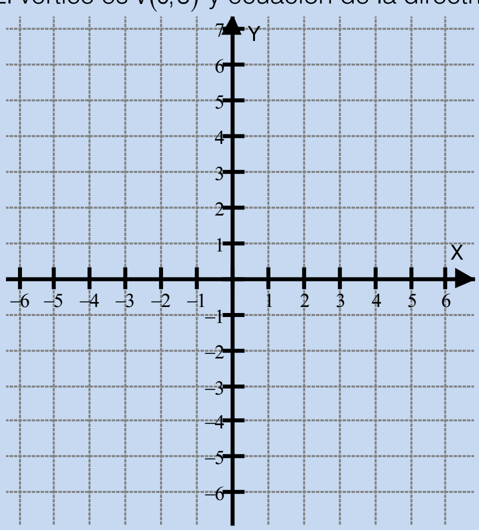
g) Su vértice es $V(2,3)$, L.L.R $= 16$ y se abre hacia arriba.



h) El lado recto es el segmento de recta que une los puntos $(-1,5)$ y $(11,5)$, además, se abre hacia arriba.

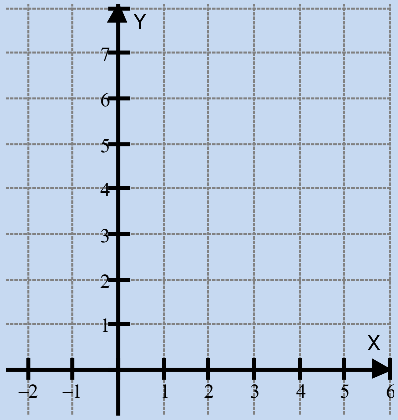


i) El vértice es $V(0,3)$ y ecuación de la directriz es $y - 6 = 0$.



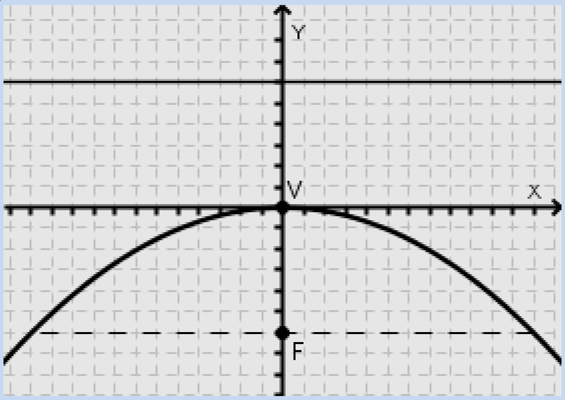
Actividad: 4 (continuación)

j) El foco es $F(1,4)$ y la ecuación de la directriz $x-4=0$.

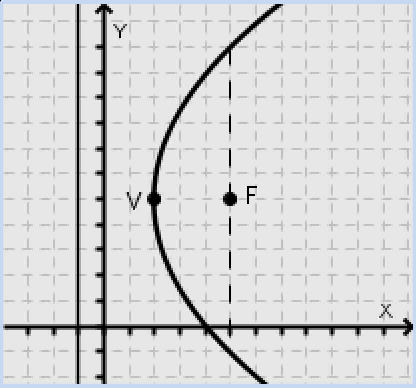


II. Escribe las coordenadas del vértice y el foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto, si la grafica de la parábola es:

a)



b)



Evaluación					
Actividad: 5	Producto: Gráficas.			Puntaje:	
Saberes					
Conceptual	Procedimental			Actitudinal	
Identifica elementos de la parábola para realizar la gráfica.	Calcula los elementos faltantes, para realizar la gráfica de la parábola.			Expresa sus dudas, reconoce y corrige sus errores.	
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente	

Secuencia didáctica 2.
Ecuación de la parábola.

Inicio

Actividad: 1

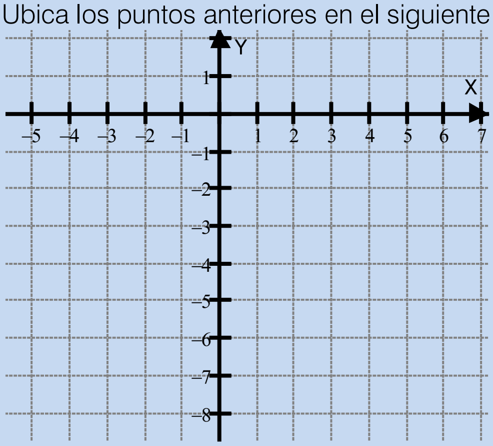
Desarrolla lo que se pide:

1. Despeja la variable "y" de la ecuación $(x-1)^2 = 12(y+4)$, para que obtengas lo que se solicita en los incisos posteriores.

a) Sustituye los valores de "x" para que completes la tabla y obtengas los puntos correspondientes a la parábola.

x	y
– 2	
0	
1	
2	
4	

b) Ubica los puntos anteriores en el siguiente plano, para que traces la gráfica.



Actividad: 1 (continuación)

c) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola?

d) Si la distancia focal de la parábola es de 3 unidades, ¿cuánto mide la longitud del lado recto?

e) ¿Cómo relacionas el vértice y la distancia focal con la ecuación de la parábola?

f) Desarrolla el binomio de la ecuación dada, para obtener la forma general de la ecuación de la parábola.

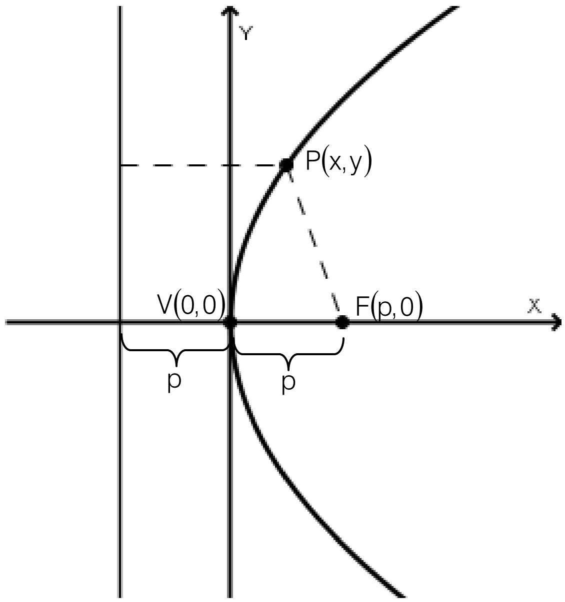
<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad:1</td><td colspan="3">Producto: Gráfica y cuestionario.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica elementos de la parábola.</td><td colspan="3">Obtiene elementos y la gráfica de la parábola.</td><td colspan="2">Muestra disposición para realizar la actividad.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Desarrollo

Parábola con vértice en el origen.

Con la experiencia que tienes en el manejo de la circunferencia y la elipse, encontrarás que es muy parecido el proceso de obtener la forma *canónica de la parábola*. A continuación se desarrollará este procedimiento, y para ello se requiere la definición de la parábola como lugar geométrico.

Una *parábola* es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta (directriz) y un punto fijo (foco).



La definición dice que la distancia de la directriz a P, es igual que a la distancia de P a F, dichas distancias se expresan de la siguiente forma:

$$d_{directriz,P} = d_{PF}$$

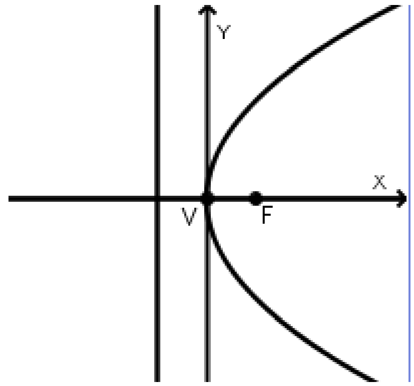
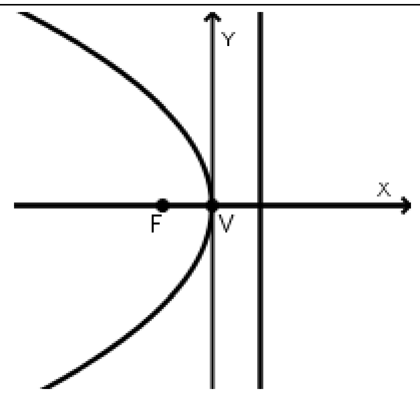
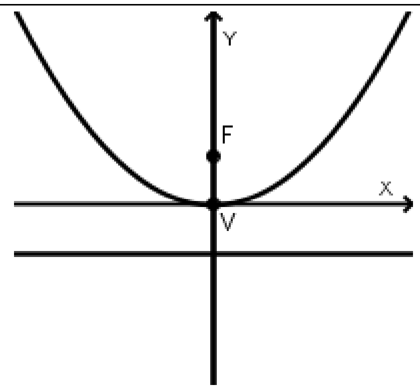
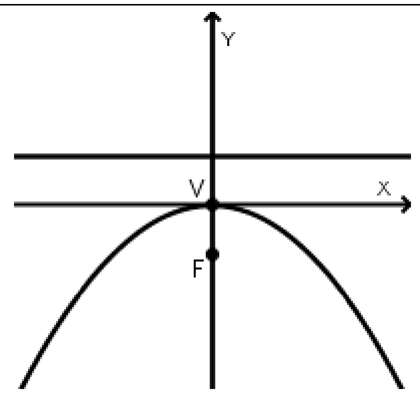
Observando la gráfica anterior, y utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos, se tiene:

$$\begin{aligned} d_{directriz,P} &= d_{PF} \\ x + p &= \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} \\ (x+p)^2 &= (x-p)^2 + y^2 \\ x^2 + 2px + p^2 &= x^2 - 2px + p^2 + y^2 \\ 2px &= -2px + y^2 \\ -y^2 &= -4px \\ y^2 &= 4px \end{aligned}$$

La ecuación de la parábola con vértice en el origen y con ramas a la derecha es:

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

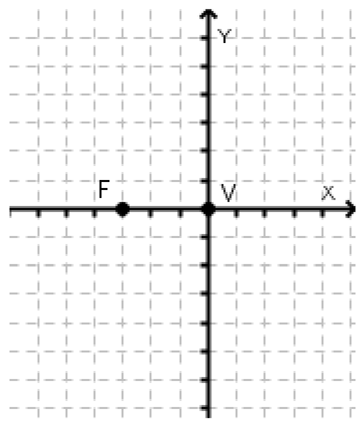
De la misma manera, se puede obtener las formas canónicas de las parábolas restantes, las cuales se describen en la siguiente tabla.

Tipo de parábola	Forma canónica	Gráfica
Horizontal con abertura a la derecha.	$y^2 = 4px$	
Horizontal con abertura a la izquierda.	$y^2 = -4px$	
Vertical con abertura hacia arriba.	$x^2 = 4py$	
Vertical con abertura hacia abajo.	$x^2 = -4py$	

A continuación se muestran varios ejemplos de parábolas con vértice en el origen.

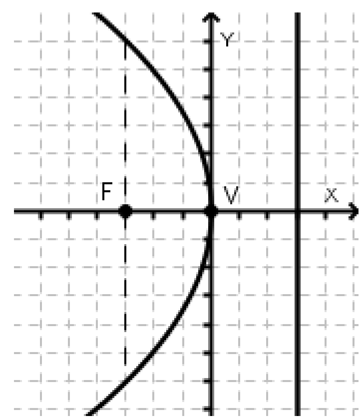
Ejemplo 1.
Encuentra la forma canónica de la parábola cuyo foco es el punto $F(-3,0)$.

El hecho de que sea canónica, implica que el vértice está en el origen, además, el foco está a la izquierda de éste, por lo tanto, la parábola se abre a la izquierda.



En la gráfica se observa que la distancia focal mide 3 unidades (p=3); con la información obtenida es suficiente para expresar la forma canónica, la cual es:

$$y^2 = -4px$$
$$y^2 = -4(3)x$$
$$y^2 = -12x$$



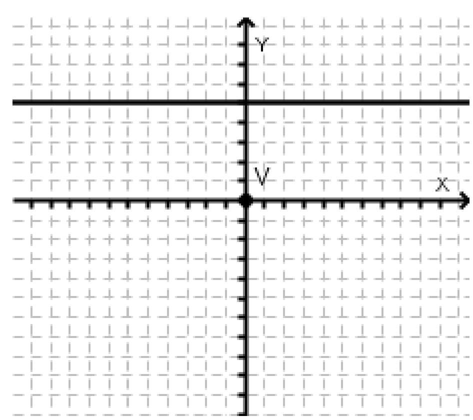
La longitud del lado recto es 12, debido a que es el cuádruplo de la distancia focal.

$$LLR = 4p$$
$$LLR = 4(3)$$
$$LLR = 12$$

Ejemplo 2.
Encontrar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el origen y la ecuación de la directriz es $y - 5 = 0$.

Primero se despeja la ecuación de la directriz para conocer el eje y el punto donde ésta corta.

$$y - 5 = 0$$
$$y = 5$$



Con ello se puede decir, que la directriz corta al eje Y en –5, como se muestra en la gráfica.

En la gráfica también se observa que p=5, y la parábola debe abrirse hacia abajo, ya que la directriz está hacia arriba del vértice, el foco se encuentra en sentido contrario.

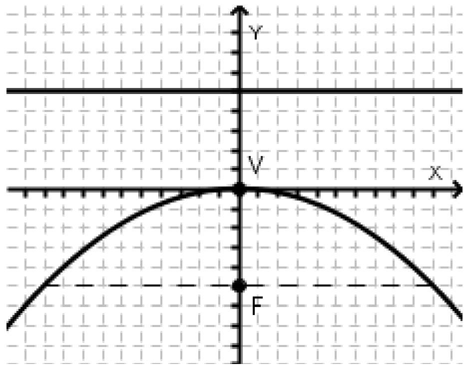
Con la información anterior, se puede encontrar la ecuación de la parábola.

$$x^2 = -4py$$
$$x^2 = -4(5)y$$
$$x^2 = -20y$$
$$x^2 + 20y = 0$$

La longitud del lado recto mide:

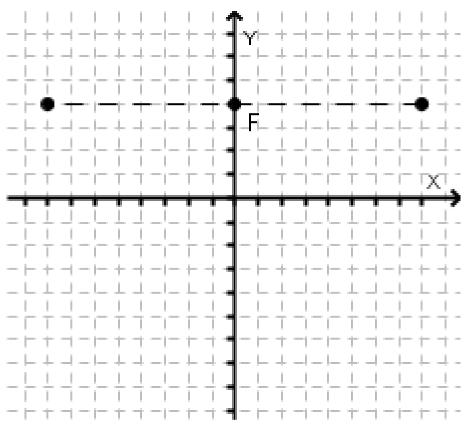
$$LLR = 4p$$
$$LLR = 4(20)$$
$$LLR = 20$$

La gráfica queda de la siguiente forma:

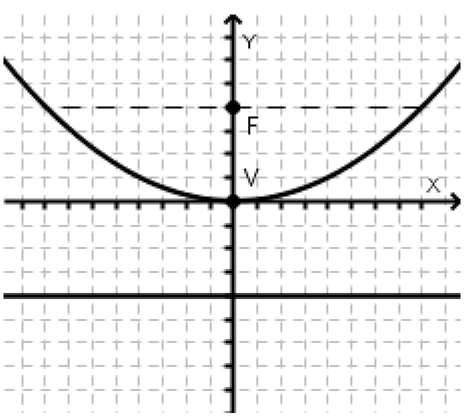


Ejemplo 3.
Encontrar la ecuación de la parábola cuyo lado recto es el segmento que une a los puntos $(\pm 8,4)$, y se abre hacia arriba.

Al graficar los extremos del lado recto, se puede ubicar el foco en medio de ellos, y deducir que la distancia focal mide 4 unidades (p=4).



Como la parábola se abre hacia arriba, el vértice se ubica a 4 unidades hacia abajo del foco y la directriz a 8 unidades del mismo, como se muestra en la gráfica.

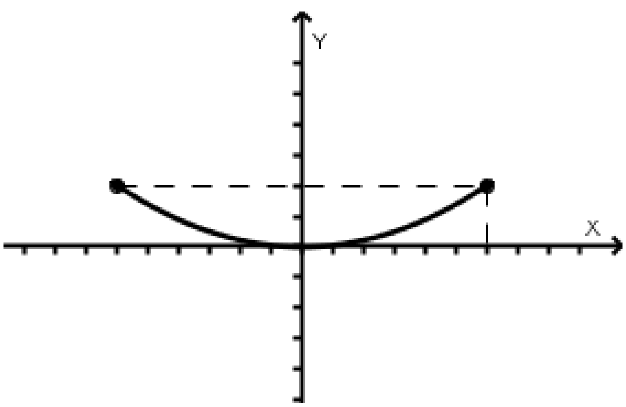


Sustituyendo p=4, en la forma canónica de la parábola vertical que se abre hacia arriba, se obtiene la ecuación.

$$x^2 = 4py$$
$$x^2 = 4(4)y$$
$$x^2 = 16y$$
$$x^2 - 16y = 0$$

Ejemplo 4.
En una antena parabólica bien diseñada, las señales que emanan de un satélite llegan y chocan con la superficie de la antena y se dirigen hacia el receptor, el cual se encuentra ubicado en el foco de la parábola que describe la antena. Si la antena tiene 12 pies de abertura y 2 pies de profundidad en su centro, ¿en qué posición debe colocarse el receptor?

Para resolver el problema, se requiere ubicar las dimensiones de la parábola en el plano cartesiano, como se muestra a continuación.



Los puntos $(-6,2)$ y $(6,2)$, que se observan en la gráfica no se deben considerar como los extremos del lado recto, porque no se tiene información alguna para que lo sean.

Lo que se debe considerar, es que los puntos antes mencionados pertenecen a la parábola, por lo tanto, la deben de satisfacer, es decir, si se toma cada uno de ellos y se sustituyen en la ecuación, la igualdad se cumple.

De acuerdo a lo anterior, se sustituirá el punto $(6,2)$ en la forma canónica de la parábola con abertura hacia arriba, con el fin de conocer el valor de la distancia focal.

$$x^2 = 4py$$
$$(6)^2 = 4p(2)$$
$$36 = 8p$$
$$p = \frac{36}{8}$$
$$p = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$
$$p = 4.5$$

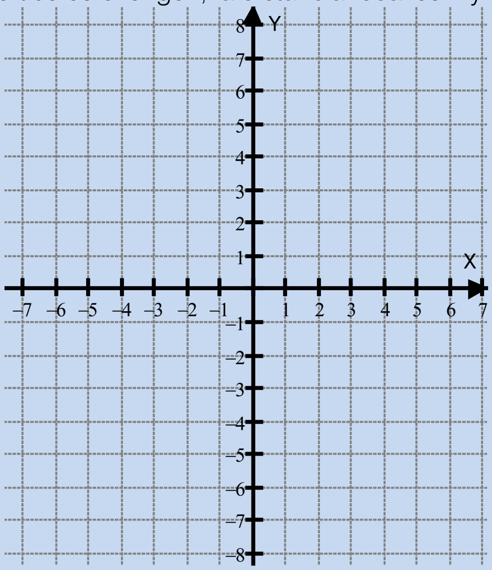
De acuerdo al resultado anterior, el receptor de la antena parabólica se debe ubicar a 4.5 pies del punto más profundo (vértice) de la misma.

Actividad: 2

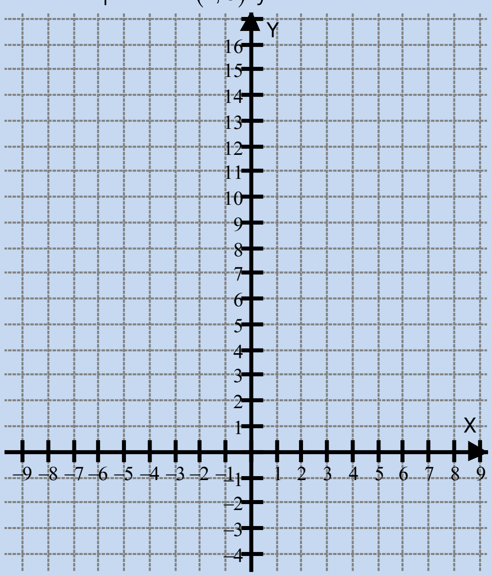
Desarrolla lo que se pide en cada sección.

I. Encuentra la ecuación y la gráfica de la parábola que cumple con las siguientes condiciones.

a) Su vértice es el origen, la distancia focal es 4 y se abre hacia la izquierda.

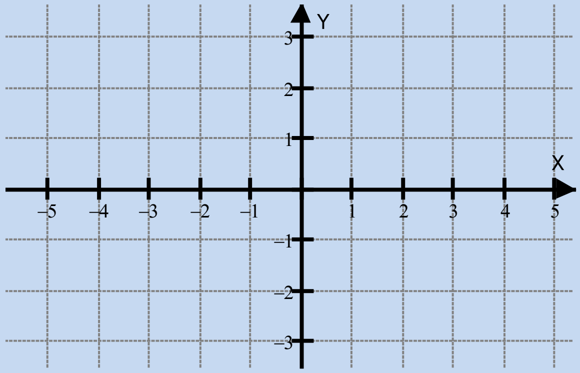


b) Su foco es el punto $F(4,0)$ y la ecuación de la directriz es $x+6=0$.

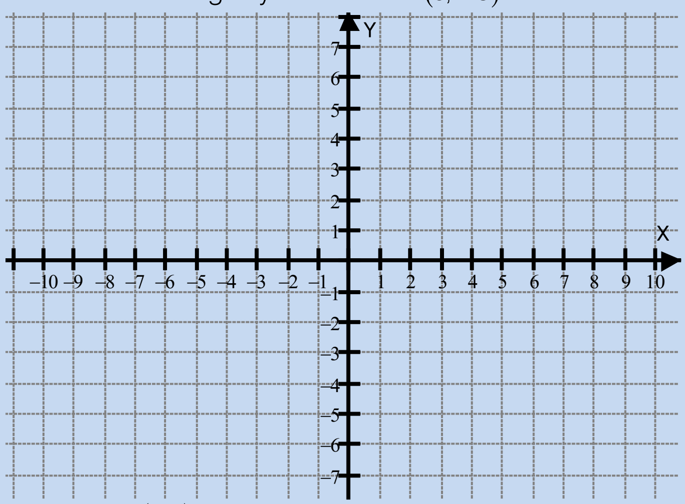


Actividad: 2 (continuación)

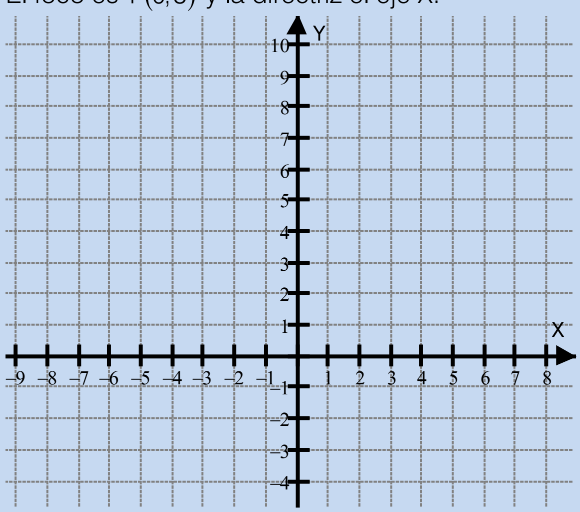
c) La ecuación de la directriz es $y-2=0$ y el foco es el punto $F(-2,0)$.



d) El vértice es el origen y su foco es $F(0,-5)$.

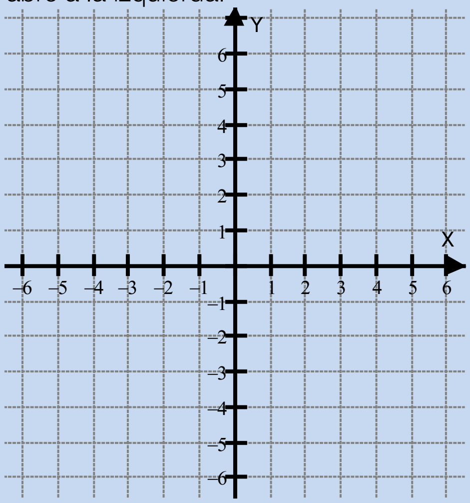


e) El foco es $F(0,8)$ y la directriz el eje X.

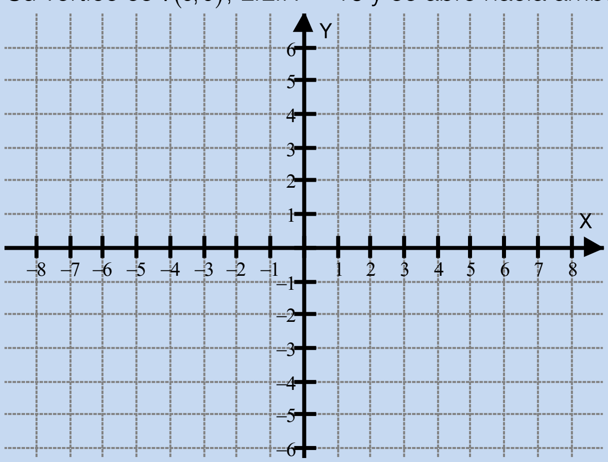


Actividad: 2 (continuación)

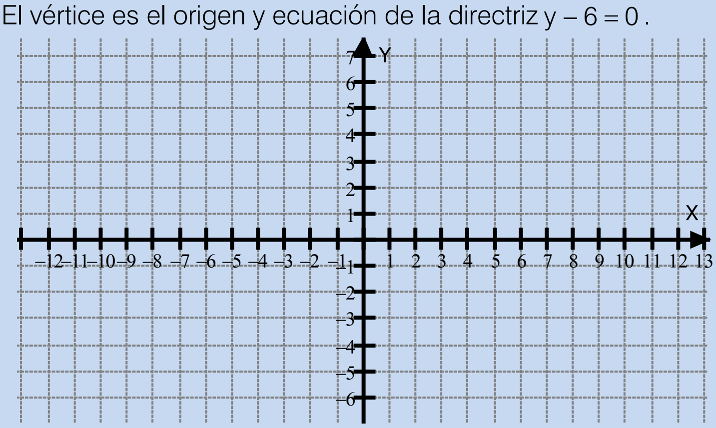
f) El lado recto es el segmento cuyos extremos son $(-3,6)$ y $(-3,-6)$, además, se abre a la izquierda.



g) Su vértice es $V(0,0)$, L.L.R $= 16$ y se abre hacia arriba.



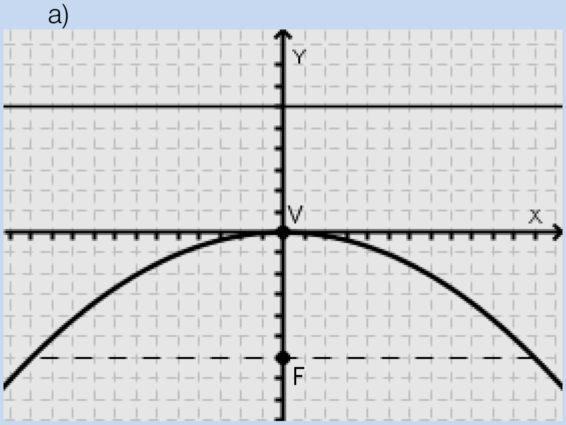
h) El vértice es el origen y ecuación de la directriz $y - 6 = 0$.



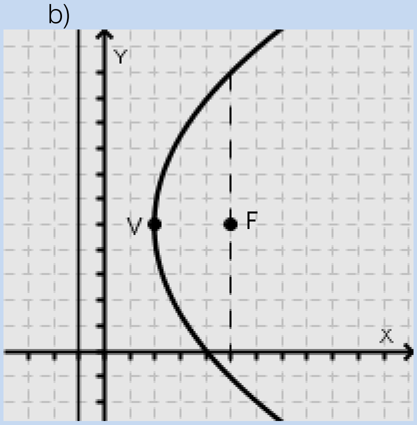
Actividad: 2 (continuación)

III. Encuentra la ecuación de la parábola cuya gráfica es:

a)



b)



Evaluación						
Actividad: 2	Producto: Ejercicios.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Identifica los elementos básicos para encontrar la ecuación y la gráfica de la parábola con vértice en el origen.	Calcula ecuaciones de parábolas con vértice en el origen y realiza la gráfica correspondiente.			Aprecia la facilidad para obtener la ecuación de la parábola con vértice en el origen.		
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

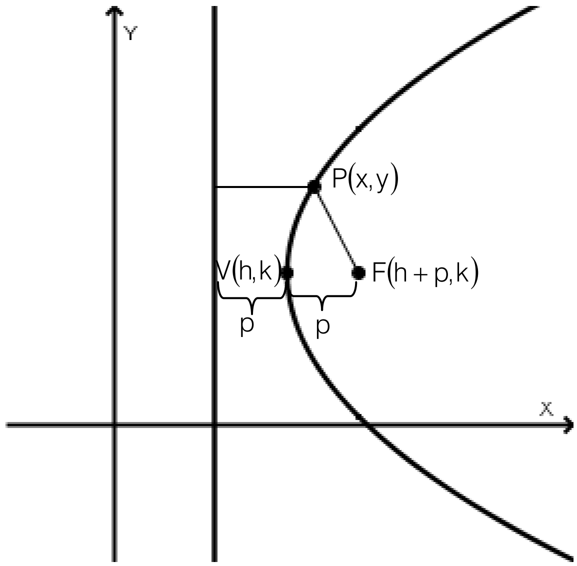
Sitios Web recomendados:

En el siguiente sitio encontrarás más ejercicios para que practiques con la parábola.

http://www.vitutor.com/geo/coni/iActividades.html

Parábola con vértice fuera del origen.

El procedimiento para obtener la forma ordinaria de la parábola, es similar a la obtención de la fórmula canónica.



La definición dice que la distancia de la directriz a P, es igual que la distancia de P a F, dichas distancias se expresan de la siguiente forma:

$$d_{directriz,P} = d_{PF}$$

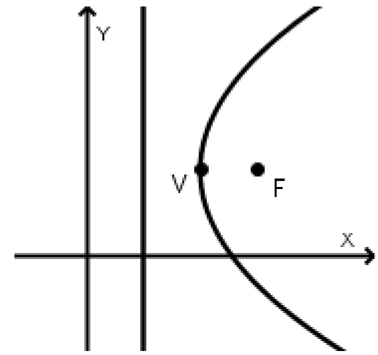
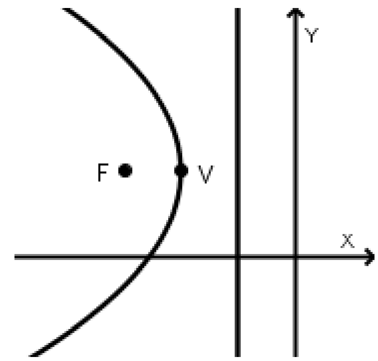
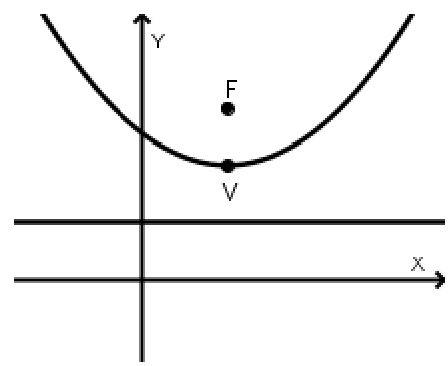
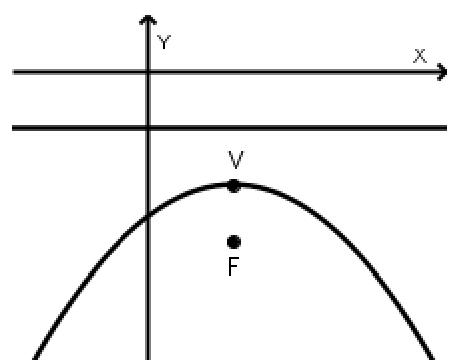
Observando la gráfica anterior y utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos, se tiene:

$$\begin{aligned}
d_{directriz,P} &= d_{PF} \\
x-(h-p) &= \sqrt{(x-(h+p))^2 + (y-k)^2} \\
(x-h+p)^2 &= (x-h-p)^2 + (y-k)^2 \\
x^2 + h^2 + p^2 - 2hx + 2px - 2ph &= x^2 + h^2 + p^2 - 2hx - 2px + 2ph + (y-k)^2 \\
2px - 2ph &= -2px + 2ph + (y-k)^2 \\
-(y-k)^2 &= -4px + 4ph \\
(y-k)^2 &= 4px - 4ph \\
(y-k)^2 &= 4p(x-h)
\end{aligned}$$

La ecuación de la parábola con vértice en $V(h,k)$ y con ramas a la derecha es:

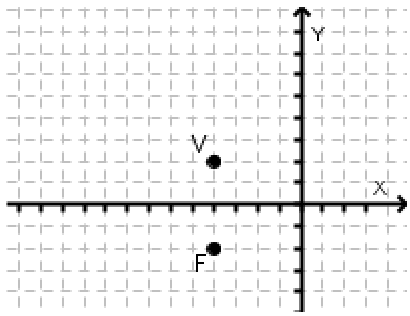
$$\boxed{(y-k)^2 = 4p(x-h)}$$

De la misma manera se pueden obtener las formas ordinarias de las parábolas restantes, las cuales se describen en la siguiente tabla.

Tipo de parábola	Forma ordinaria	Gráfica
Horizontal con abertura a la derecha.	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	
Horizontal con abertura a la izquierda.	$(y-k)^2 = -4p(x-h)$	
Vertical con abertura hacia arriba.	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	
Vertical con abertura hacia abajo.	$(x-h)^2 = -4p(y-k)$	

Ejemplo 1.
Encontrar la forma ordinaria de la parábola cuyo vértice es $V(-4,2)$, y su foco es $F(-4,-2)$.

Primero se grafica el vértice y el foco, para determinar la medida de la distancia focal y el tipo de parábola que corresponde.

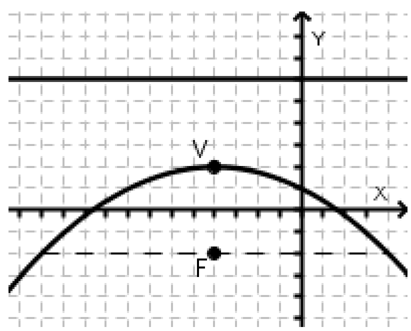


La gráfica indica que p=4, y que la parábola se abre hacia abajo, por lo que se puede expresar la forma ordinaria, considerando el vértice $V(-4,2)=(h,k)$ y "p".

$$(x-h)^2=-4p(y-k)$$
$$(x+4)^2=-4(4)(y-2)$$
$$(x+4)^2=-16(y-2)$$

La longitud del lado recto es 16, puesto que:

$$LLR=4p$$
$$LLR=4(4)$$
$$LLR=16$$



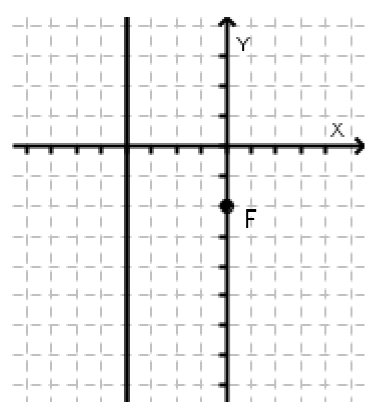
Ejemplo 2.
Encontrar la ecuación de la parábola cuya directriz es la ecuación $x+4=0$ y el foco es $F(0,-2)$

Para ubicar el eje y el punto en donde corta la directriz, ésta se despeja.

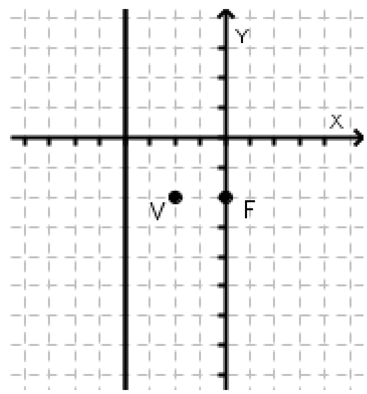
$$x+4=0$$
$$x=-4$$

Por lo tanto, se dice que la directriz corta al eje X en –4.

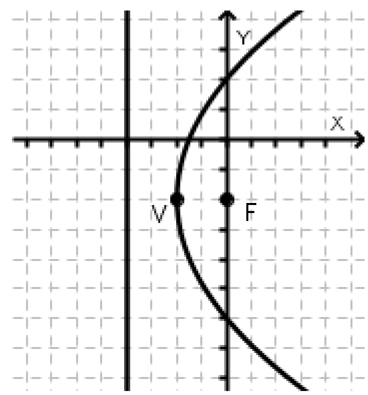
Con esta información, se puede trazar la recta y ubicar el foco, como se muestra en la siguiente gráfica.



En ella se observa que el punto $(-2,-2)$ corresponde al vértice, puesto que está a la mitad de la distancia del foco a la directriz, por lo tanto, p=2.

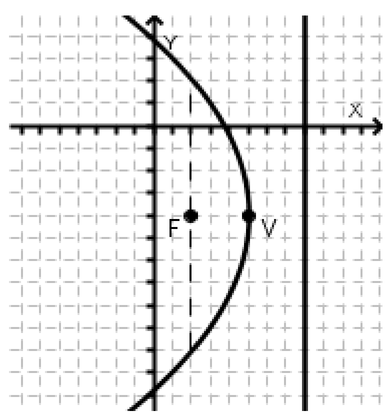


La gráfica indica que es una parábola con vértice fuera del origen y se abre a la derecha, por lo tanto, utilizando la forma ordinaria correspondiente para sustituir el vértice $V(-2,-2)=(h,k)$ y $p=2$, la ecuación queda:



$$(y-k)^2=4p(x-h)$$
$$(y+2)^2=4(2)(x+2)$$
$$(y+2)^2=8(x+2)$$
$$y^2+4y+4=8x+16$$
$$y^2-8x+4y+-12=0$$

Ejemplo 3.
Encontrar la ecuación de la parábola si su gráfica es:



Sólo se requiere conocer las coordenadas del vértice, la distancia focal y el tipo de parábola, para encontrar la ecuación.

En la gráfica se observa que el vértice es $V(5,-4)=(h,k)$, $p=3$ y es una parábola horizontal que se abre a la izquierda.

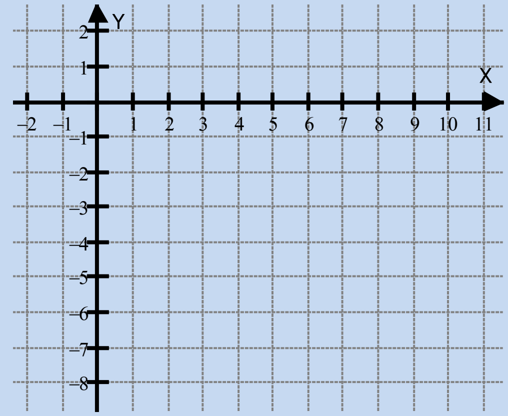
$$(y-k)^2=-4p(x-h)$$
$$(y+4)^2=-4(3)(x-5)$$
$$(y+4)^2=-12(x-5)$$
$$y^2+8y+16=-12x+60$$
$$y^2+12x+8y-44=0$$

Actividad: 3

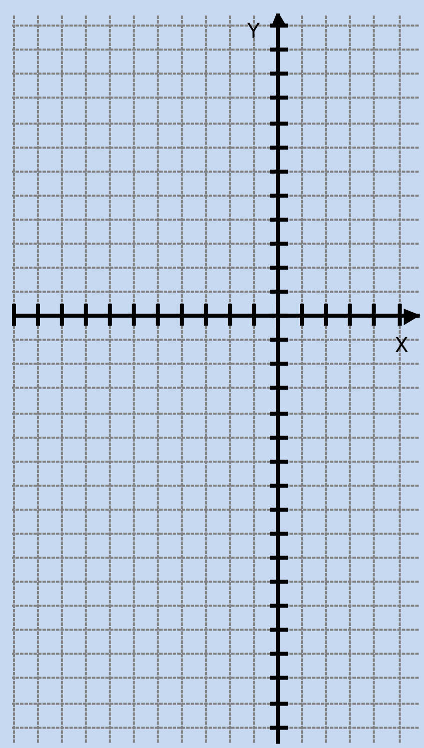
Desarrolla lo que se pide en cada sección.

I. Encuentra la forma ordinaria, los elementos y la gráfica de la parábola que cumple con las siguientes condiciones.

a) Su vértice es el punto $V(7,-3)$, la distancia focal mide 2 unidades y se abre a la izquierda.

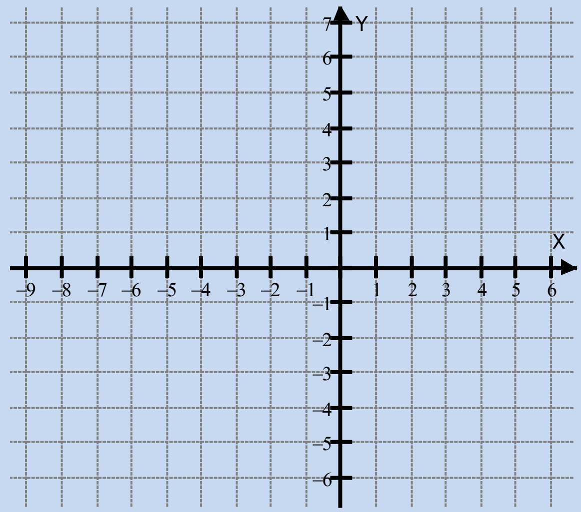


b) El foco es $F(4,-3)$ y la ecuación de la directriz es la recta $x+4=0$.

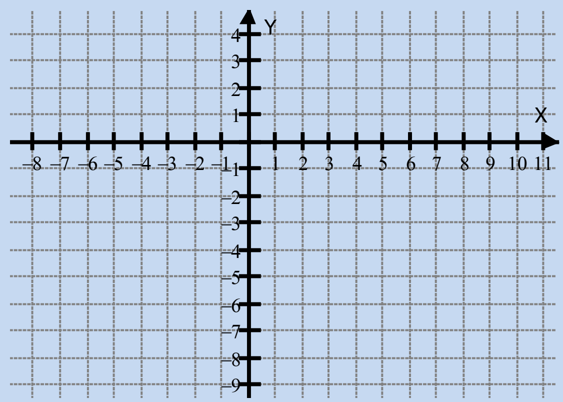


Actividad: 3 (continuación)

c) Las coordenadas de los extremos del lado recto son los puntos $(5,4)$ y $(-9,4)$, además, es una parábola con abertura hacia arriba.

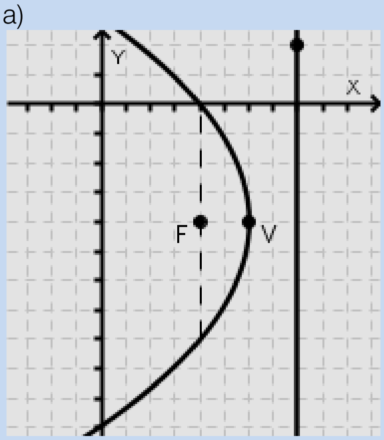


d) Su vértice es $V(2,-4)$ y su foco es $F(2,-8)$.



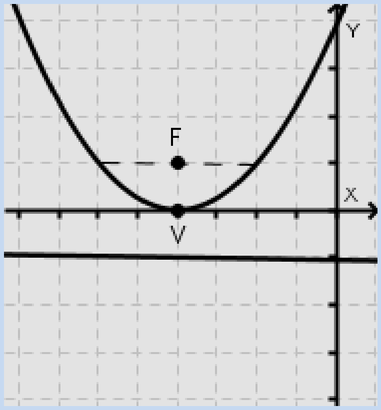
II. Expresa la ecuación y los elementos de la parábola cuya gráfica es:

a)

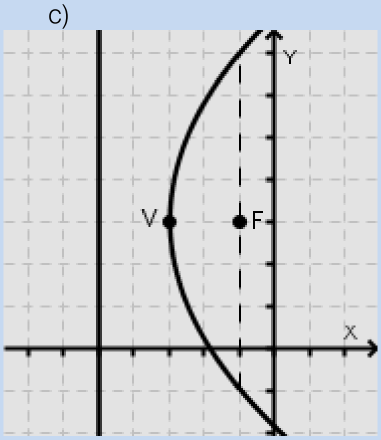


Actividad: 3 (continuación)

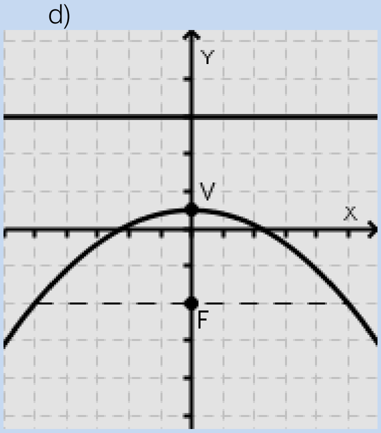
b)



c)



d)



Evaluación		
Actividad: 3	Producto: Ejercicios	Puntaje:
Saberes		
Conceptual	Procedimental	Actitudinal
Identifica los elementos de la parábola con vértice fuera del origen a partir de ciertas condiciones.	Determina la ecuación de la parábola a partir de ciertos elementos.	Reconoce la necesidad de sus habilidades algebraicas previas para la obtención de elementos que no se proporcionan directamente, con el fin de obtener la ecuación de la parábola.

Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente	

Ecuación general de la parábola.

La ecuación general de la parábola dependerá del tipo de parábola que se trate, es decir, de si es horizontal o vertical.

Para una parábola horizontal, su ecuación general es:

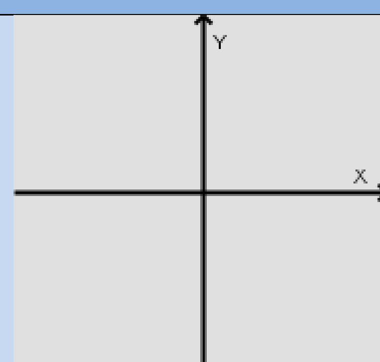
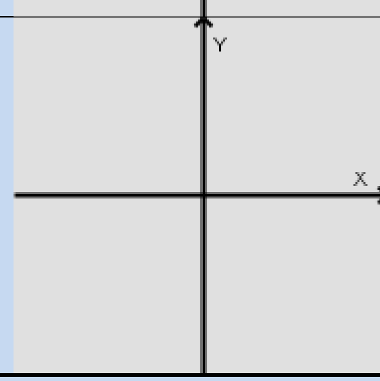
$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si es una parábola vertical, su ecuación es:

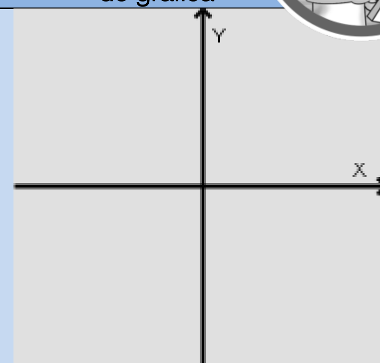
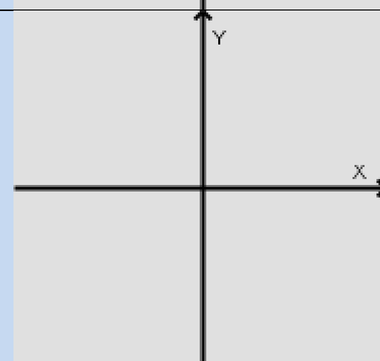
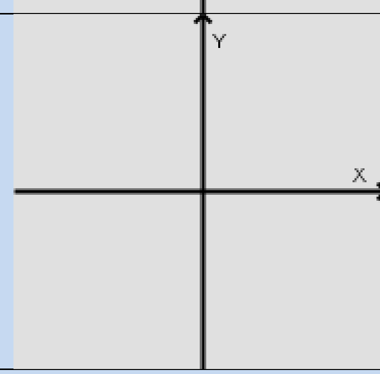
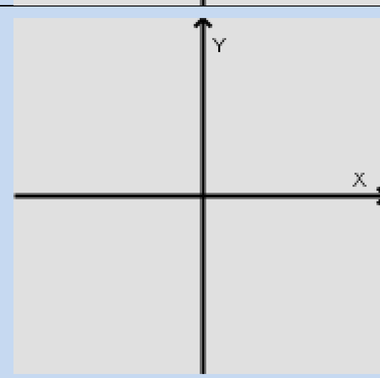
$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Actividad: 4

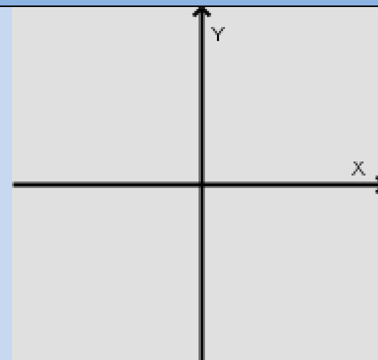
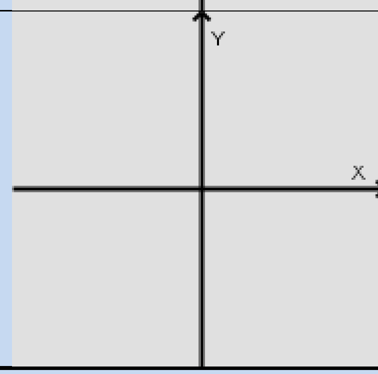
Determina cómo debe ser la ecuación general y la gráfica de la parábola en los siguientes casos.

Condición de la parábola	Ecuación general	Ejemplo de gráfica
El vértice es el origen		
		

Actividad: 4 (continuación)

Condición de la parábola	Ecuación general	Ejemplo de gráfica
La parábola pasa por el origen.		
		
El vértice está sobre el eje X		
		

Actividad: 4 (continuación)

Condición de la parábola	Ecuación general	Ejemplo de gráfica
El vértice está sobre el eje Y.		
		

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 4</td><td colspan="3">Producto: Complementación de la tabla.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica las condiciones de la parábola para determinar la forma de su ecuación general.</td><td colspan="3">Analiza los coeficientes que debe poseer la forma general, para cumplir con ciertas condiciones.</td><td colspan="2">Muestra interés en realizar la actividad y aprecia la utilidad de conocer con anterioridad la forma que debe tener la ecuación de una parábola, bajo ciertas condiciones.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Al igual que en la circunferencia y la elipse, se completa el trinomio cuadrado perfecto para transformar la ecuación general de la parábola a su forma ordinaria, con la finalidad de conocer algunos de sus elementos para trazar su gráfica.

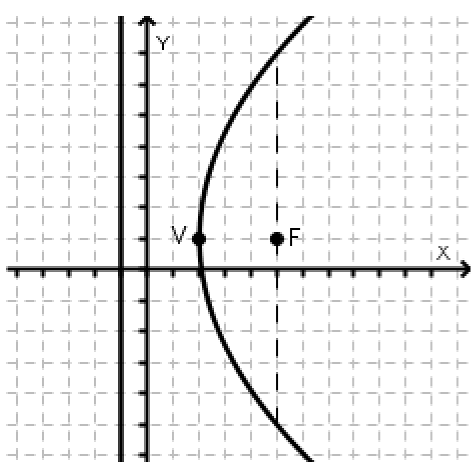
Para visualizar en forma sencilla la transformación de la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria, se muestra a continuación un ejemplo concreto.

Ejemplo 1.

El procedimiento para encontrar los elementos necesarios y trazar la gráfica de la parábola, cuya ecuación es $y^2-12x-2y+25=0$, se explicarán paso a paso, en la siguiente tabla.

Transformación de la ecuación de la parábola a la forma ordinaria.	Descripción
$y^2-12x-2y+25=0$	Se tiene la ecuación de la parábola.
$y^2-2y=12x-25$	La constante y el término lineal cuya variable no tiene término cuadrático, se envía al otro lado de la igualdad.
$y^2-2y+(-1)^2=12x-25+(-1)^2$	Se completa el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo de la igualdad, ya que es el único miembro de la ecuación que posee término cuadrático, por ello se añade a ambos lados de la ecuación, el cuadrado de la mitad del término lineal que corresponde al binomio.
$y^2-2y+1=12x-24$	Se expresa el trinomio cuadrado perfecto.
$(y-1)^2=12(x-2)$	Se factoriza el trinomio que se encuentra del lado izquierdo, expresando el binomio al cuadrado, y se factoriza el término del lado derecho por medio de factor común.
$(y-k)^2=4p(x-h)$	Se compara la forma ordinaria obtenida con la forma ordinaria de la parábola horizontal con ramas a la derecha, ya que el coeficiente del término del lado derecho es positivo, y además, el término cuadrático tiene la variable “y”.
El vértice es el punto $V(2,1)$ y $4p=12$, $p=\frac{12}{4}$, $p=3$	Se obtienen el valor del vértice y la distancia focal (p).

Con la información obtenida, se puede trazar la gráfica.



Ejemplo 2.

Encontrar los elementos y la gráfica de la parábola cuya ecuación es $x^2 - 6x - 10y - 3 = 0$.

Se realiza el proceso de completar trinomio cuadrado perfecto como sigue:

$$x^2 - 6x - 6y - 27 = 0$$
$$x^2 - 6x = 6y + 27$$
$$x^2 - 6x + (-3)^2 = 6y + 27 + (-3)^2$$
$$x^2 - 6x + 9 = 6y + 36$$
$$(x-3)^2 = 6(y+6)$$

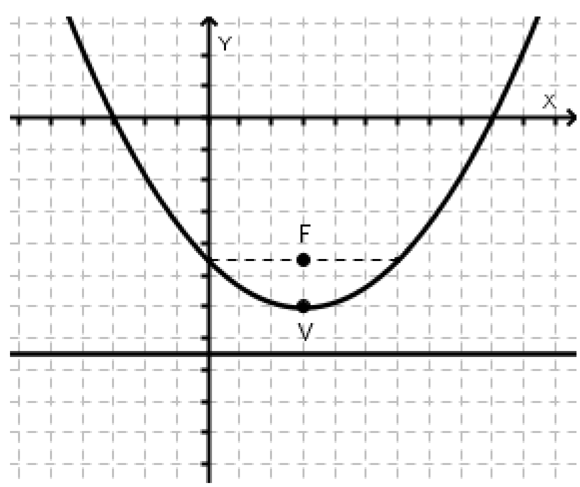
Se compara el resultado con la forma ordinaria correspondiente.

$$(x-3)^2 = 6(y+6)$$
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

De esta comparación se deduce que el vértice es $V(3,-6)$ y además $p = \frac{3}{2}$, debido a lo siguiente:

$$4p = 6$$
$$p = \frac{6}{4} \quad .$$
$$p = \frac{3}{2} = 1.5$$

Ubicando el vértice $V(3,-6)$, y considerando que es una parábola vertical que se abre hacia arriba, la gráfica queda de la siguiente forma:



La longitud del lado recto es:

$$LLR = 4p$$
$$LLR = 4\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$LLR = 6$$

El foco se encuentra a $\frac{3}{2}$ unidades hacia arriba.

$$V\left(3,-6+\frac{3}{2}\right) = V\left(3,-\frac{9}{2}\right) = V(3,-4.5)$$

La directriz está a $\frac{3}{2}$ unidades hacia abajo del vértice, y corta al eje Y en $y = -\frac{15}{2}$, debido a lo siguiente:

$$y = -6 - \frac{3}{2}$$
$$y = -\frac{15}{2}$$

Por lo tanto, la ecuación de la directriz es:

$$2y = -15$$
$$2y + 15 = 0$$

Ejemplo 3.

Ejemplo 3.

Encontrar los elementos y la gráfica de la parábola cuya ecuación es $y^2 + 8x + 8 = 0$.

En este caso no es necesario utilizar el método, puesto que la ecuación carece del término lineal correspondiente a la variable del término cuadrático, es decir, que tiene y^2, pero no tiene un término con “y”, por lo tanto, sólo se pasa los otros dos términos al lado derecho.

$$y^2 + 8x + 8 = 0$$
$$y^2 = -8x - 8$$
$$y^2 = -8(x+1)$$

Comparando el resultado con la forma ordinaria correspondiente queda:

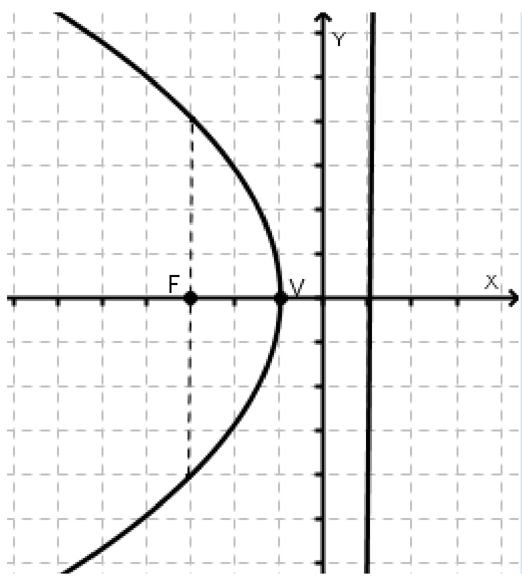
$$y^2 = -8(x+1)$$
$$(y-0)^2 = -8(x+1)$$
$$(y-k)^2 = -4p(x-h)$$

El vértice en esta parábola horizontal que se abre a la izquierda, es: $V(-1, 0)$, y $-4p = -8$, por lo tanto, la distancia focal es 2, y con ello se deduce que la longitud del lado recto es 8.

La directriz queda a 2 unidades a la derecha del vértice y el foco a 2 unidades a la izquierda, como se ve en la gráfica.

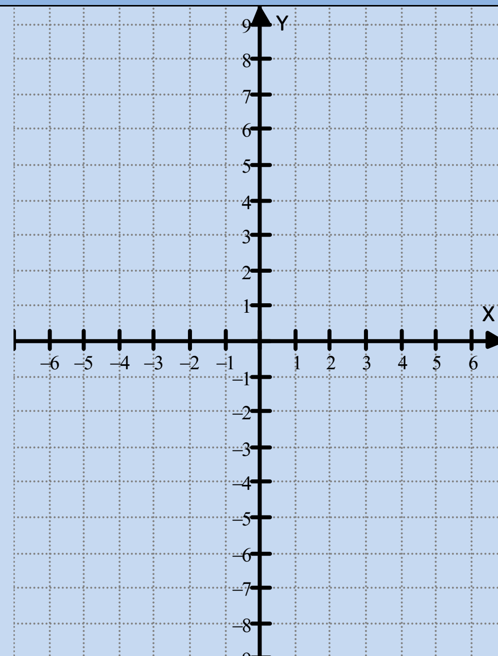
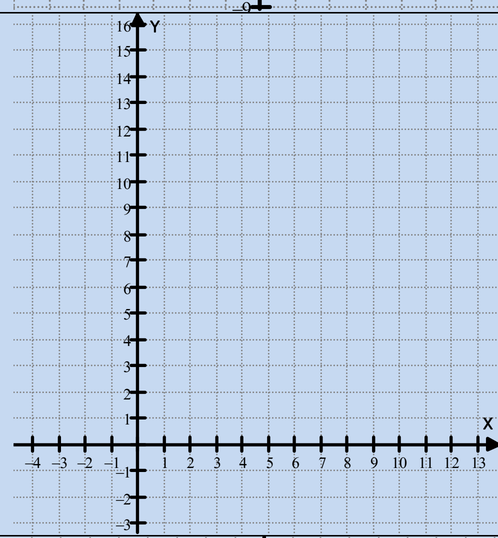
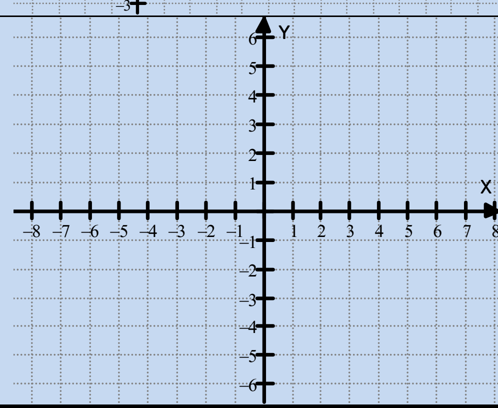
Las coordenadas del foco son $F(-1-2, 0) = (-3, 0)$, y la directriz corta al eje X en x=1, por lo tanto, su ecuación es:

$$x = 1$$
$$x - 1 = 0$$

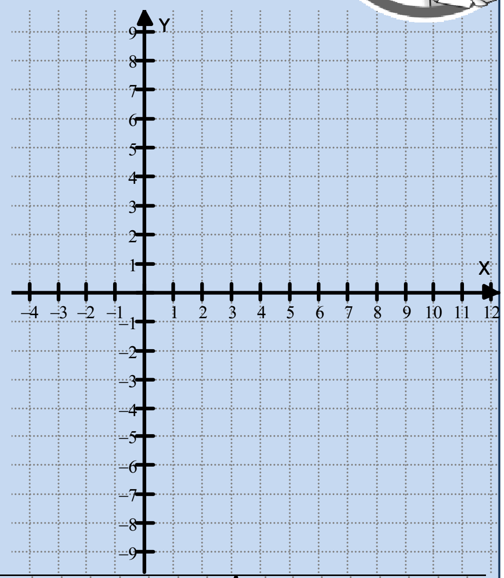
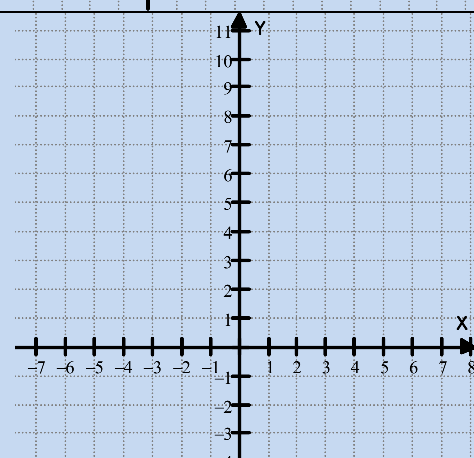
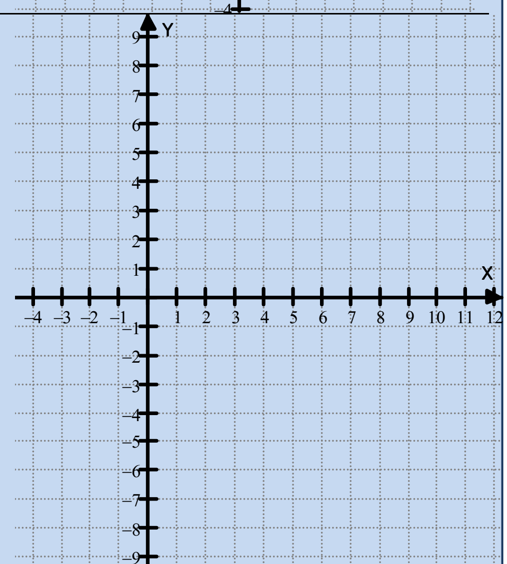


Actividad: 5

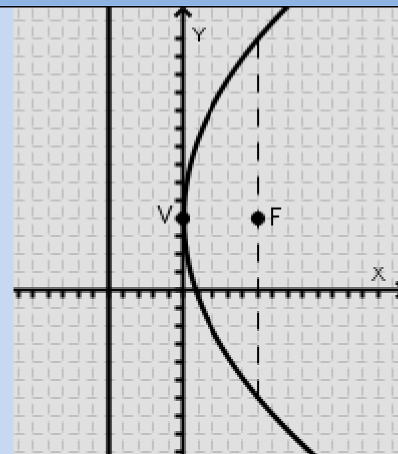
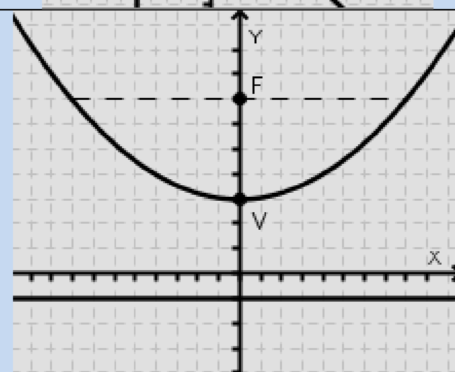
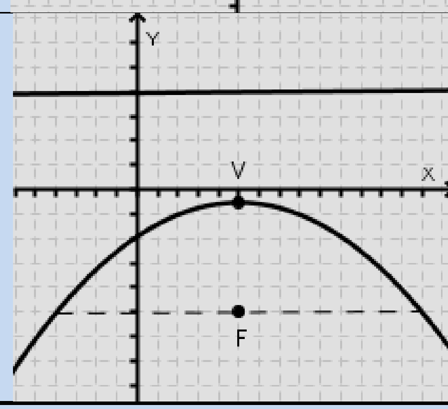
Completa la siguiente tabla.

Ecuación en su forma general	Elementos	Ecuación en su forma ordinaria	Gráfica
$y^2 - 16x = 0$	p = LLR = Ec.Directriz = V = F =		
$y^2 + 18x - 14y - 68 = 0$	p = LLR = Ec.Directriz = V = F =		
$x^2 + 14y = 0$	p = LLR = Ec.Directriz = V = F =		

Actividad: 5 (continuación)

Ecuación en su forma general	Elementos	Ecuación en su forma ordinaria	Gráfica
$y^2 + 16x - 96 = 0$	p = LLR = Ec.Directriz = V = F =		
$x^2 + 12y - 48 = 0$	p = LLR = Ec.Directriz = V = F =		
$x^2 - 8x - 8y = 0$	p = LLR = Ec.Directriz = V = F =		

Actividad: 5 (continuación)

Ecuación en su forma general	Elementos	Ecuación en su forma ordinaria	Gráfica
	p = LLR = Ec.Directriz = V = F =		
	p = LLR = Ec.Directriz = V = F =		
	p = LLR = Ec.Directriz = V = F =		

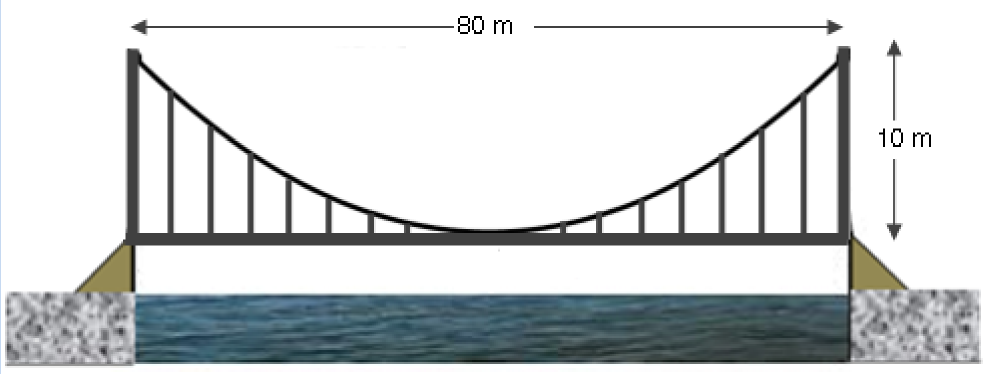
<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 5</td><td colspan="3">Producto: Complementación de la tabla.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica los elementos de la parábola, a partir de su ecuación y viceversa.</td><td colspan="3">Obtiene los elementos de una parábola a partir de su ecuación y viceversa.</td><td colspan="2">Muestra interés en realizar la actividad y aprecia el método de completar trinomio cuadrado perfecto, para la obtención de los elementos de la parábola y la realización de su gráfica.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Cierre

Actividad: 6

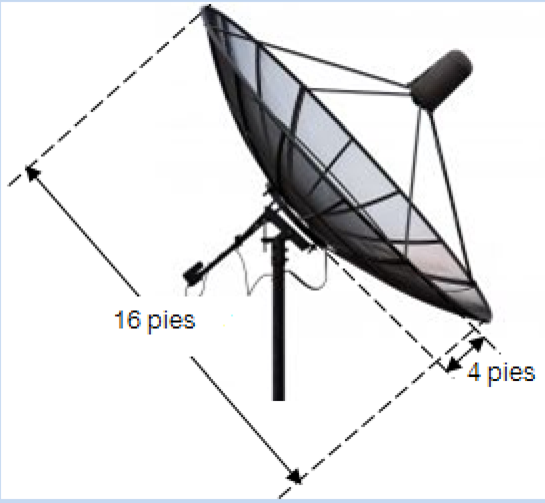
Resuelve los siguientes problemas.

1. Los cables de un puente colgante tienen forma parabólica. Las torres que soportan los cables están separadas 80 m entre sí y tienen 10 m de altura. Si los cables tocan la superficie de rodamiento a la mitad de la distancia entre las torres, ¿cuál será la altura del cable de un punto situado a 20 m de una de las torres?



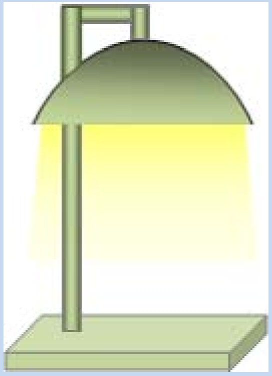
Actividad: 6 (continuación)

2. Las señales que emanan de un satélite llegan a la superficie de una antena parabólica y se reflejan hacia el punto donde se encuentra el receptor. Si la antena tiene 16 pies de diámetro en su abertura y 4 pies de profundidad en su centro, ¿en qué posición debe colocarse el receptor?



Actividad: 6 (continuación)

3. Un fanal tiene la forma de un paraboloide de revolución. La bombilla, colocada en el foco, está a 1 pulgada del vértice. Si su profundidad es de 2.5 pulgadas, ¿cuál es el diámetro del fanal en su abertura?

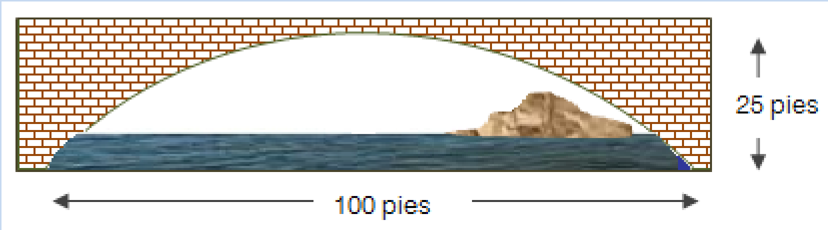


Actividad: 6 (continuación)

4. Un reflector tiene la forma de un paraboloide de revolución. Si la fuente de luz está a 4 pies de la base, a lo largo del eje de simetría, y la abertura es de 10 pies, ¿qué profundidad deberá tener el reflector?

Actividad: 6 (continuación)

5. Se construye un puente con forma de arco parabólico. El puente tiene un claro de 100 pies máxima de 25 pies. Encuentra la altura del arco a las distancias de 15, 35 y 50 pies del centr



<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 6</td><td colspan="3">Producto: Problemas de aplicación.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Reconoce los elementos básicos para resolver problemas cotidianos que estén relacionados con la parábola.</td><td colspan="3">Aplica los elementos básicos, así como la ecuación de la parábola, para dar solución a problemas cotidianos.</td><td colspan="2">Participa activamente en la resolución de los problemas en los que se pone en juego el uso de la parábola.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Bibliografía

BAROT, Michael y Palma, Olivia. Geometría Analítica. Santillana Bachillerato. México. 2010.

BURRI Gail F. Geometría integración, aplicaciones y conexiones. Mc Graw Hill. México. 887 pp. 2003.

FLEMING Walter, VARBERG Dale. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México 1999.

GARCÏA Arenas Jesús. Geometría y Experiencias. Editorial Alambra.190 pp. 1990.

HEMMERLING, Edwin. Geometría elemental. Ed. Limusa. México. 2009.

IBÁÑEZ, Patricia y García, Gerardo. Matemáticas 3, Geometría Analítica. Thompson Learning. México, 2006.

LEDEZMA, Mario, et. Al. Geometría Analítica y Funciones con enfoque en competenicias. Book Mart. México. 2008.

LEDEZMA, Mario, et. Al. Matemáticas III con enfoque en competenicias. Book Mart. México. 2008.

LEHMANN, Charles. Geometría Analítica. Ed. Limusa, México. 2009.

RUIZ Basto Joaquín. Geometría Analítica Básica. Publicaciones Culturales. 2005.

SALAZAR, Pedro y Magaña, Luis. Matemáticas 3. Nueva imagen. México. 2005.

SWOKOWSKI, Earl y Cole, Jeffry. Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica. Cengage Learning. México. 2009.